

التشابهات المستوية

التحويل العكسي للتناظر المحوري الذي محور (A) هو نفسه.

- التحويل العكسي للإتسحاب الذي شعاعه \vec{u} هو إتسحاب شعاعه $-\vec{u}$.

1-2 تركيب التحويلات

f و g تحويلان، نعرف التحويل $g \circ f$ كما يلي
من أجل كل نقطة M يكون $g \circ f(M) = g(f(M))$

ملاحظة

يمكن تمديد هذا التعريف بحيث يشمل مركب ثلاثة تحويلات أو أكثر، ومنه

يكون $f \circ g \circ h$ هو التحويل $(f \circ g) \circ h$ أو $f \circ (g \circ h)$

مرهنة 1

- إذا حول f و g المستقيمت إلى مستقيمت والدوائر إلى دوائر فإن $g \circ f$ يقوم بنفس الدور كذلك.
- إذا حافظ f و g على المسافات والزوايا (الوجهة والهندسية)، التوازي، التعامد، المرجح أو المساحات فإن $g \circ f$ يقوم بنفس الدور كذلك.

مرهنة 2

إذا ضاعف التحويل f المسافات بعدد حقيقي $k > 0$ ، وإذا ضاعف التحويل g المسافات بعدد حقيقي $k' > 0$ فإن التحويل $g \circ f$ يضاعف المسافات بالعدد الحقيقي $k \cdot k'$.

الإثبات

لتكن A_1 و B_1 صورتين A و B بالتحويل f بحيث $A_1 B_1 = k AB$
وإذا حول g النقطتين A_1 و B_1 إلى A_2 و B_2 بحيث $A_2 B_2 = k' A_1 B_1$
فإن التحويل $g \circ f$ يحول A و B إلى A_2 و B_2 .
 $A_2 B_2 = k' A_1 B_1 = k' (k AB) = k' k AB$
إذن التحويل $g \circ f$ يضاعف المسافة بالعدد الحقيقي $k \cdot k'$.

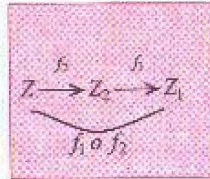
خاصية

f و g تحويلان نقطيان و f^{-1} و g^{-1} تحويليهما العكسيين على التوالي،
إذا كان $h = f \circ g$ فإن $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ و $g = f^{-1} \circ h$
إذا كان $f \circ g = Id$ فإن $f = g^{-1}$ و $g = f^{-1}$
إذا كان $f \circ f = Id$ فإن $f = f^{-1}$

تمرين تدريبي 1

في معلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{i}, \vec{j}) ، الكتابتين المركبتين للتحويلين T_1 و T_2 هما على التوالي $Z' = iZ + 2$ و $Z' = 3Z + 2i$.
ما هي الكتابة المركبة للتحويل $T_1 \circ T_2$ ؟

الحل



إذا كانت الكتابة المركبة للتحويل النقطي T_1 هي $Z' = f_1(Z)$
والكتابة المركبة للتحويل النقطي T_2 هي $Z' = f_2(Z)$
فإن الكتابة المركبة للتحويل النقطي $T_1 \circ T_2$ هي $Z' = f_1 \circ f_2(Z)$
 $Z_2 = 3Z + 2i$
 $Z_1 = iZ_2 + 2 = i(3Z + 2i) + 2 = 3iZ$
ومنه تكون الكتابة المركبة للتحويل $T_1 \circ T_2$ هي $Z' = 3iZ$.

تمرين تدريبي 2

في معلم متعامد ومتجانس مباشر، الكتابة المركبة للتحويلين T_1 و T_2 هما على التوالي $Z' = i\bar{Z} + i$ ، $Z' = 2iZ + i$
ما هي الكتابة المركبة للتحويلين T_1^{-1} و T_2^{-1} ؟

الحل

- إذا كان لتحويل T كتابة مركبة $Z' = f(Z)$ فإن $Z = f^{-1}(Z')$
لإيجاد الكتابة المركبة لـ T^{-1} نغير عن Z بدلالة Z'
 $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$ يكافئ $Z' = 2iZ + i$
وعليه فإن التحويل T_1^{-1} يحول النقطة M' ذات اللاحقة Z' إلى النقطة M ذات اللاحقة Z
بحيث، $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$ إذن الكتابة المركبة لـ T_1^{-1} هي $Z = -\frac{i}{2}Z' - \frac{1}{2}$
من المساواة $Z' = i\bar{Z} + i$ ينتج $Z = i\bar{Z}' - 1$
وعليه فإن التحويل T_2^{-1} يحول النقطة M' ذات اللاحقة Z' إلى النقطة M ذات اللاحقة Z
بحيث، $Z = i\bar{Z}' - 1$ إذن الكتابة المركبة لـ T_2^{-1} هي $Z = i\bar{Z}' - 1$

2 التشابه

تعريف

التشابه هو تحويل يحافظ على نسب المسافات.
من أجل كل النقط M, P, Q, N مع $M \neq P, Q$ و $P \neq Q$ و $M \neq N$ و $P \neq Q$ التي صورها على التوالي M', P', Q', N' لدينا $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$
وبصفة أخرى التشابه هو التحويل الذي يضاعف المسافات أي يوجد عدد حقيقي $k > 0$ الذي

يسمى نسبة التشابه بحيث من أجل كل نقطتين M و N صورهما على الترتيب M' و N' لدينا $MN' = k MN$

خواص

- (1) مركب تشابهين نسبتهما على التوالي k و k' هو تشابه نسبته $k k'$.
- (2) التحويل العكسي للتشابه الذي نسبته k بحيث $k > 0$ هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.
- (3) إذا كان S تشابه نسبته k و ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين فإن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' ومتساوي الساقين حيث $A' = S(A)$ و $B' = S(B)$ و $C' = S(C)$.
- (4) إذا كان ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين و S و S' تشابهين بحيث $S = S'$ فإن $S(C) = S'(C)$ و $S(B) = S'(B)$ و $S(A) = S'(A)$.

الإنبات

- (2) ليكن S تشابه نسبته k .
نضع $M_1 = S(M)$ و $N_1 = S(N)$ عندئذ $S^{-1}(N) = N_1$ و $S^{-1}(M) = M_1$
وبما أن S تشابه نسبته k فإن $MN = k M_1 N_1$ ومنه نستنتج $M_1 N_1 = \frac{1}{k} MN$.
إذن S^{-1} هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.

- (3) - من المساواة $AB = AC$ نستنتج $k AB = k AC$ أي $AB' = AC'$ وهذا يعني أن المثلث $A'B'C'$ متقايس الساقين.
- من المساواة $AB^2 + AC^2 = BC^2$ نستنتج أن $k^2 AB^2 + k^2 AC^2 = k^2 BC^2$ أي $B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2$ وهذا يعني أن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' .
إذن المثلث $A'B'C'$ قائم في A' ومتساوي الساقين.

- (4) نسمي A', B', C' صور A, B, C على التوالي بالتشابه S وكذلك بالتشابه S' ،
 k و k' نسبتي S و S' على التوالي.

- نريد إثبات أن $k = k'$

من الفرضية نستنتج أن $AB' = k AB$ و $AB' = k' AB$

لكن $AB \neq 0$ إذن $k = k'$.

- لإثبات أن $S = S'$ نثبت أنه من أجل كل نقطة M يكون $S(M) = S'(M)$

نفرض أن $M_1 = S(M)$ و $M_2 = S'(M)$ ونبين أن $M_1 = M_2$.

لدينا $A'M_1 = k AM$ و $A'M_2 = k AM$ وعليه $A'M_1 = A'M_2$

إذا كان $M_1 \neq M_2$ فإن A' تنتمي إلى محور القطعة $[M_1 M_2]$

نفس الشيء بالنسبة إلى النقطتين B, C أي أنهما تقعان على محور $[M_1 M_2]$

وهذا يخالف الفرض كون A, B, C ليست على استقامة واحدة.

إذن $M_1 = M_2$ وعليه $S = S'$

تمرين تدريبي

في المستوى المركب، ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z' = (1+i)Z + 1$
بين أن T تشابه ثم حدد نسبته

الحل

لإثبات أن T تشابه نبحث عن إمكانية وجود عدد حقيقي $(k > 0)$ بحيث من أجل كل نقطتين M و N صورتيهما على الترتيب M' و N' لدينا،

$$MN' = k MN$$

$$(1) \dots \dots \dots Z_{M'} = (1+i)Z_M + 1 \text{ تكافئ } T(M) = M'$$

$$(2) \dots \dots \dots Z_{N'} = (1+i)Z_N + 1 \text{ تكافئ } T(N) = N'$$

$$Z_{N'} - Z_{M'} = (1+i)(Z_N - Z_M) \text{ نجد } (2) \text{ من } (1)$$

$$\text{ومنه نستنتج أن } |Z_{N'} - Z_{M'}| = |1+i| |Z_N - Z_M|$$

$$\text{بما أن } |1+i| = \sqrt{2} \text{ و } MN = |Z_N - Z_M| \text{ و } MN' = |Z_{N'} - Z_{M'}| \text{ فإن } MN' = \sqrt{2} MN$$

$$\text{وهذا يعني أن } T \text{ تشابه نسبته } k = \sqrt{2}.$$

3. التعبير عن التشابه بالأعداد المركبة

مرهنة

القول أن التحويل S هو تشابه يكافئ القول أنه في كل معلم متعامد ومتجانس مباشر S له كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$ أو $Z' = \overline{aZ} + b$ حيث a و b عددين مركبين ثابتين و $a \neq 0$.

نتيجة

إذا كان للتشابه S نقطتين صامدتين A و B فإنه إما أن يكون تحويلًا مطابقًا Id وأما أن يكون تناظرًا محوريًا محوره (AB) .

الإثبات

نختار معلمًا متعامدًا ومتجانسًا مباشرًا مركزه النقطة A بحيث يكون محور فواصله منطبقًا

على المستقيم (AB) عندئذ $Z_A = 0$ و $Z_B \neq 0$.

إذا كانت S كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$

فإن المساواة $S(A) = A$ تستلزم $Z_A = aZ_A + b$ أي $b = 0$

والمساواة $S(B) = B$ تستلزم $Z_B = aZ_B$ أي $a = 1$

وتكون الكتابة المركبة L هي $Z' = Z$ وهذا يعني أن S تحويل مطابق .
- إذا كانت L كتابة مركبة من الشكل $Z' = a\bar{Z} + b$ نتحصل على $Z' = \bar{Z}$ إذن S هو تناظر محوري محوره (AB) .

ملاحظة

إذا كان للتشابه S ثلاث نقاط صامدة ليست على استقامة واحدة فإن S هو Id .

تمرين تدريبي

S تحويل كتابته المركبة هي $Z' = 3i\bar{Z} - 2(1+i)$
(1) بين أن S هو تشابه نسبته 3 .
(2) بين أن النقطة I ذات الإحداثيات $1+i$ صامدة بـ S .
(3) ما هي لاحقة النقطة A صورة A ذات الإحداثيات 2 بالتحويل S ؟
(ب) بين أن النقط A ، A' و I على استقامة واحدة .

الحل

(1) لتكن M و N نقطتان صورتيهما على التوالي M' و N' بالتحويل S .

$$Z_{N'} = 3i\bar{Z}_N - 2(1+i) \text{ و } Z_{M'} = 3i\bar{Z}_M - 2(1+i)$$

$$\text{بالطرح نجد } Z_{N'} - Z_{M'} = 3i(\bar{Z}_N - \bar{Z}_M) \text{ ومنه نستنتج } |Z_{N'} - Z_{M'}| = |3i| |\bar{Z}_N - \bar{Z}_M|$$

$$\text{لكن } |3i| = 3 \text{ و } |Z_{N'} - Z_{M'}| = M'N' \text{ و } |\bar{Z}_N - \bar{Z}_M| = MN$$

$$\text{إذن } M'N' = 3MN$$

وهذا يعني أن S تشابه نسبته 3 (أي نسبة التشابه هي $|a|$) .

(2) I صامدة بالتحويل S يعني أن $S(I) = I$ أي $Z_I = 3i\bar{Z}_I - 2(1+i)$

$$3i\bar{Z}_I - 2(1+i) = 3i(1-i) - 2(1+i) = 3i + 3 - 2 - 2i - 1 + i = Z_I$$

ومنه I صامدة بالتحويل S .

(3) $S(A) = A'$ تكافئ $Z_{A'} = 3i\bar{Z}_A - 2(1+i)$

$$\text{لدينا } Z_{A'} = 6i - 2 - 2i = -2 + 4i \text{ لأن } A' \text{ لاحقتها } -2 + 4i$$

لكي تكون النقط A ، A' ، I على استقامة واحدة يجب أن يكون $\frac{Z_{A'} - Z_I}{Z_A - Z_I} = \alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{Z_{A'} - Z_I}{Z_A - Z_I} = \frac{-2 + 4i - (-2 + 4i)}{1 - i} = \frac{0}{1 - i} = 0$$

إذن النقط A ، A' ، I على استقامة واحدة

4. التشابهات المستوية المباشرة

4-1 التشابه المباشر

القول عن تشابه أنه مباشر يعني أنه يحافظ على الزوايا الموجهة .

مثال -

كل من الإنسحاب ، الدوران ، التحاكي وتركيباتها تحافظ على الزوايا الموجهة أي أنها تشابهات مباشرة .

مبرهنة

القول أن التحويل S تشابه مباشر يكافئ القول أن كتابته المركبة في كل معلم متعامد ومتجانس مباشر هي من الشكل $Z' = aZ + b$ مع $a \neq 0$ عندئذ مركبتين ثابتين و $a \neq 0$

الإثبات

للتشابه كتابتين مركبتين ممكنتين هما $Z' = aZ + b$ و $Z' = a\bar{Z} + b$

لتكن M' ، N' ، P' صور النقط المختلفة مثنى مثنى M ، N ، P بالتحويل S .

- إذا كان $Z' = aZ + b$

فإن ،

$$\frac{Z_{P'} - Z_{M'}}{Z_{N'} - Z_{M'}} = \frac{(aZ_P + b) - (aZ_M + b)}{(aZ_N + b) - (aZ_M + b)} = \frac{Z_P - Z_M}{Z_N - Z_M}$$

$$\text{ومنه نستنتج } (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$$

إذن هناك حفظ للزوايا الموجهة وبالتالي S تشابه مباشر .

- إذا كان $Z' = a\bar{Z} + b$ وبطريقة مماثلة نبين أن :

$$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$$

وهذا يعني أن S لا يحفظ الزوايا الموجهة إذن هذه الكتابة لا تعبر عن التشابه المباشر .

ملاحظة

كل من التشابه المباشر وغير المباشر يحفظ الزوايا الهندسية و $|a|$ هي نسبة التشابه

تمرين تدريبي

في المستوى الموجه المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, i, j)

T تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x, y)$ النقطة $M'(x', y')$

$$\text{بحيث } x' = -2y + 3 \text{ و } y' = 2x$$

بين أن T تشابه مباشر .

✓ الحل

لتكن Z لاحقة M و Z' لاحقة M' .
 $Z' = x' + iy' = -2y + 3 + 2ix = 2iy + 3 + 2ix - 2i(x + iy) + 3 = 2iZ + 3$
 إذن T تشابه مباشر نسبته $k = |a| = 2$

2-4 تعيين التشابه المباشر الذي يحول (A, B) إلى (A', B')

مرهنة

$A' \neq B'$ و $A \neq B$ بحيث A, B, A', B' أربع نقاط بحيث $S(B) = B'$ و $S(A) = A'$ و S وحيد بحيث S يوجد تشابه مباشر

الإثبات

لتكن $Z_A, Z_B, Z_{A'}, Z_{B'}$ لواقع النقاط A, B, A', B' على الترتيب في المستوي المركب.
 إثبات وجود ووحداية تشابه مباشر S ذو الكتابة المركبة $Z' = aZ + b$ بحيث $S(B) = B'$ و $S(A) = A'$ و $a \neq 0$

$$\begin{cases} Z_{A'} = aZ_A + b \dots (1) \\ Z_{B'} = aZ_B + b \dots (2) \end{cases} \text{ بحيث}$$

ب طرح (2) من (1) نجد $Z_A - Z_B = a(Z_A - Z_B)$
 بما أن $A' \neq B'$ و $A \neq B$ فإن $Z_A - Z_B \neq 0$ و $Z_{A'} - Z_{B'} \neq 0$
 وعليه $a = \frac{Z_{A'} - Z_{B'}}{Z_A - Z_B}$ و $a \neq 0$

إذن توجد قيمة وحيدة لـ a وبعد تعويضها في (1) نجد قيمة وحيدة لـ b .
 إذن يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و B إلى B'

نتيجة

الشرط اللازم لوجود تشابه مباشر وحيد يحول المثلث ABC إلى المثلث $A'B'C'$ مع $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$ هو،
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ و $(\vec{BC}, \vec{BA}) = (\vec{B'C'}, \vec{B'A'})$
 وهذا الشرط كاف أن تحقق.

ملاحظة

إذا كانت الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = aZ + b$ فإن $a = \frac{Z_{A'} - Z_{B'}}{Z_A - Z_B}$
 إذن $|a| = \frac{A'B'}{AB}$ و $\arg(a) = (\vec{AB}, \vec{A'B'})$ و $\frac{A'B'}{AB}$ وزاويته $(\vec{AB}, \vec{A'B'})$
 وعليه فإن نسبة S هي $\frac{A'B'}{AB}$

تمرين تدريبي

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (o, i, j)
 النقاط A, B, A', B' لواقعها على الترتيب $1+i, 2-i, 2+2i, 2+2i$
 عين التشابه المباشر الوحيد S بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

✓ الحل

بما أن $A' \neq B'$ و $A \neq B$ فإنه وحسب المبرهنة السابقة يوجد تشابه مباشر وحيد
 بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ كتابته المركبة من الشكل $Z' = aZ + b$

$$\begin{cases} -2 = a(1+i) + b \dots (1) \\ 2+2i = a(2-i) + b \dots (2) \end{cases} \text{ يحققان الجملة } b, a$$

ب طرح (2) من (1) نجد $-4-2i = a(-1+2i)$

$$a = \frac{-4-2i}{-1+2i} \text{ ومنه}$$

$$a = \frac{(-4-2i)(-1-2i)}{5} = \frac{4+8i+2i-4}{5} = 2i$$

نعوض قيمة a في (1) نجد $b = -2i$ وبالتالي $Z' = 2iZ - 2i$

إذن يوجد تشابه مباشر وحيد نسبته $|a| = |2i| = 2$

5. الكتابة المختصرة للتشابه المباشر

مرهنة

كل تشابه مباشر هو إما إنسحاب أو تركيب دوران وتحاكي لهما نفس المركز.

الإثبات

لتكن $Z' = aZ + b$ مع $a \neq 0$ الكتابة المركبة للتشابه المباشر S .

- إذا كان $a = 1$ فإن $Z' = Z + b$ وبالتالي S إنسحاب

- إذا كان $a \neq 1$ ، لنثبت أولا أنه توجد نقطة وحيدة I بحيث $S(I) = I$
 وهذا يؤول إلى إثبات أن المعادلة $Z' = Z$ لها حل وحيد

$$Z' = Z \text{ تكافئ } (1-a)Z = b \text{ تكافئ } Z = \frac{b}{1-a}$$

لتكن ω بحيث $\omega = \frac{b}{1-a}$ لاحقة I ونضع $a = ke^{i\theta}$ حيث $k = |a|$

$$Z' - \omega = aZ + b - \omega$$

$$= aZ + (1-a)\omega - \omega = a(Z - \omega)$$

نسمي h التحاكي الذي مركزه I ونسبته k و r الدوران الذي مركزه I وزاويته θ لنبين أن $S = hor = roh$

الكتابتان المركبتان h و r على التوالي هما :

$$Z' = e^{i\theta}(Z - \omega) + \omega \quad \text{و} \quad Z' = k(Z - \omega) + \omega$$

إذن الكتابة المركبة لـ hor هي :

$$Z' - \omega = a(Z - \omega) \quad \text{أي} \quad Z' = ke^{i\theta}(Z - \omega) + \omega$$

إذن $S = hor$ وبنفس الطريقة نبين أن $S = roh$

نتيجة 1

كل تشابه مباشر يختلف عن الإسحاب له نقطة صامدة وحيدة

نرمز لها بـ I ، هذا التشابه يكتب على الشكل المختصر :

$$S = h(I, k) \text{ or } (I, \theta) \\ = r(I, \theta) \circ h(I, k)$$

نقول عندئذ أن التشابه المباشر S له مركز I ونسبة k وزاوية θ

ونرمز له بـ $S(I, k, \theta)$

نتيجة 2

القول أن التحويل S تشابه مباشر نسبته k ($k \neq 1$) وزاويته θ يكافئ

القول أن كتابته المركبة هي من الشكل $Z' = ke^{i\theta}Z + b$

إذا كانت M' صورة M ($M \neq I$) بالتشابه المباشر الذي مركزه I

ونسبته k وزاويته θ

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM'} = k \overrightarrow{IM} \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{فإن} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- إذا كانت M', M, I ثلاث نقط مختلفة فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد

مركزه I بحيث $S(M) = M'$ مع $k = \frac{IM'}{IM}$ و $\theta = (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$

- كل تشابه مباشر يحول المستقيمات إلى مستقيمات ، الدوائر إلى دوائر

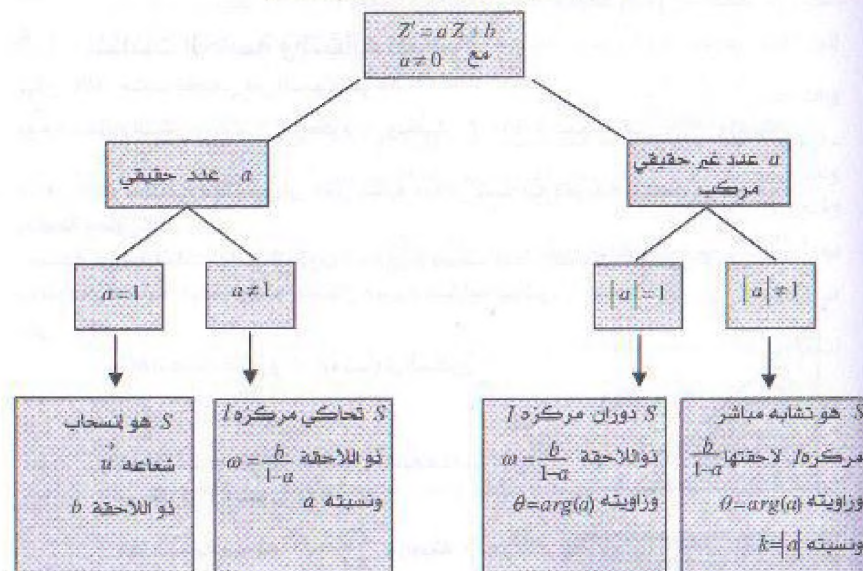
ويحفظ التعامد والتوازي والمرجح . وبصفة خاصة S يحول المثلث ABC إلى مثلث $A'B'C'$ يشابهه في الاتجاه المباشر .

ملاحظة

- إذا كان h تحاكي نسبته k ($k \neq 0$) ومركزه النقطة O فإن h تشابه مباشر مركزه النقطة O ونسبته k وزاويته π

- إذا كان r مركب دوران وتحاكي نسبته سالبة فإن r هو تشابه مباشر

مخطط تصنيف التشابه المباشر



تمرين تدريبي

(1) أعط العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي كتابته المركبة هي :

$$Z' = (1-i)Z + 1+i$$

(2) أوجد الكتابة المركبة للتشابه المباشر الذي مركزه I للاحقتها $1-i$ ونسبته 2

وزاويته $\frac{\pi}{3}$

الحل :

(1) لدينا $b = 1+i$ و $a = 1-i$

نسبة التشابه المباشر هي $|a| = \sqrt{2}$ وزاويته هي $\arg(a) = \frac{-\pi}{4}$

ومركزه النقطة I للاحقتها $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{i} = -i+1$ أي $I(1, -1)$

(2) بما أن $k = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ فإن $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

بالحساب نجد $b = (1-a)\omega = -\sqrt{3}i(1-i) = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ و $a = 1 + \sqrt{3}i$

إذن الكتابة المركبة لهذا التشابه المباشر هي $Z' = (1 + \sqrt{3}i)Z - \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

6. المثلثات الخاصة والتشابه المباشر

1-6 المثلثات الخاصة والتشابه المباشر

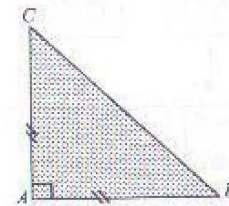
ليكن ABC مثلث كفي من المستوي للوجه.

يوجد تشابه مباشر وحيد S مركزه A وبحيث $S(B) = C$ ونسبته هي $\frac{AC}{AB}$ وزاويته

(\vec{AB}, \vec{AC}) نستنتج مما سبق أن كل تشابه مباشر نستطيع تعريفه بإعطاء مركزه ونقطة وصورته.

- بصفة خاصة الثلاث القائم المتساوي الساقين أو نصف المثلث المتقايس الأضلاع توجي لنا باستعمال التشابه المباشر وهذه الأشكال مميزة للتشابه المباشر.

مثال -



ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

هذا المثلث يوجي لنا استعمال تشابه مباشر مركزه C ويحول A إلى B .

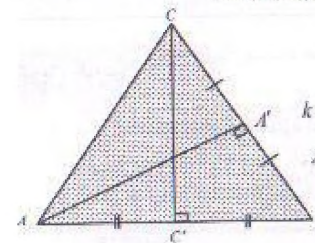
هذا التشابه نسبته $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}$ وزاويته $\theta = (\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{4}$

- إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع فإنه يوجد تشابه مباشر مركزه النقطة A

يحول C إلى C' زاويته $\frac{\pi}{3}$ ونسبته $k = \frac{AC'}{AC} = 2$

- يوجد تشابه مباشر مركزه A يحول B إلى A'

وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ونسبته $k = \frac{AA'}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



2-6 المثلثات المتشابهة

التعريف المعطى في السنة الأولى ثانوي المتعلق بمثلثين متشابهين هو كالتالي:

"مثلثين متشابهين هما مثلثين تكون زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر"

• ABC مثلث و S تشابه مباشر بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$

ومنه $A'B'C'$ هو صورة ABC بالتشابه المباشر S و ABC هو صورة $A'B'C'$ بـ S^{-1}

وبما أن التشابه المباشر يحفظ الزوايا للوجه فإنه يحفظ الزوايا الهندسية كذلك.

ونقول أن:

المثلثين ABC و $A'B'C'$ المتشابهين في الاتجاه المباشر متشابهان بالمعنى الغلط في السنة الأولى.

• والأن نبين أنه إذا كان لدينا مثلثين ABC و $A'B'C'$ بحيث:

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) \text{ و } (\vec{BC}, \vec{BA}) = (\vec{B'C'}, \vec{B'A'})$$

فهل يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول ABC إلى $A'B'C'$ ؟

- نفرض أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان بمعنى تعريف السنة الأولى.

لتكن D نقطة من $[AB]$ بحيث $AD = A'B'$ و E نقطة من $[AC]$ بحيث $AE = A'C'$

إذن (DE) يوازي (BC) وحسب نظرية طاليس فإن $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

وهذا يعني $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ (1)

- ليكن S التشابه المباشر الوحيد بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

ولنبين أن $S(C) = C'$ ومن أجل ذلك نفرض أنه توجد صورة C'' للنقطة C بالتشابه S

ونبين أن $C'' = C'$

بما أن C'' صورة C بالتشابه S فإن $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC''}{AC}$ (2)

من (1) و (2) نجد أن $AC'' = AC'$ (3)

لدينا $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ و $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C''})$

ومنه نستنتج $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C''})$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن $\vec{A'C'} = \vec{A'C''}$ وهذا يعني أن C'' منطبقة على C'

إذن $S(C) = C'$ وعليه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول ABC إلى $A'B'C'$

نتيجة

إذا كانت زوايا أحد مثلثين تساوي زوايا الآخر فإنه يوجد دائما تشابه مباشر يحول أحدهما إلى الآخر.

7. القياسات المسوية

1-7 القياس

تعريف 1

نسمي تقايس كل تحويل يحفظ المسافات أي كل تشابه نسبته 1.

الكتابة المركبة للتقايس هي إذن $Z' = aZ + b$ أو $Z' = \bar{a}\bar{Z} + b$ مع $|a| = 1$ أي $a = e^{i\theta}$

مثال -

كل من الإنسحاب، الدوران، التناظر المحوري هي تقايسات.

تعريف 2

التقايس الذي يحفظ الزوايا للوجه هو إزاحة (تقايس موجب).

التقايس الذي يحول زاوية موجهة إلى زاوية موجهة معاكسة لها هو ضد إزاحة (تقايس سالب)

مثال - ♦

الانسحاب والدوران هما الإزاحتين الوحيدتين في المستوي.
التناظر المحوري هو ضد إزاحة.

2-7 تركيب إزاحتين

مركب دورانين

مبرهنة

r_1 دوران زاويته θ_1 و r_2 دوران زاويته θ_2
- إذا كان $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإن $r_2 \circ r_1$ هو دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$.
- إذا كان $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ فإن $r_2 \circ r_1$ انسحاب.

الإثبات

في المستوي الوجه تكون الكتابة المركبة لـ r_1 و r_2 هما $Z' = e^{i\theta_1} Z + b_1$ و $Z' = e^{i\theta_2} Z + b_2$
ومنه فإن الكتابة المركبة لـ $r_2 \circ r_1$ هي $Z' = e^{i(\theta_2 + \theta_1)} Z + e^{i\theta_2} b_1 + b_2$
إذن $r_2 \circ r_1$ له كتابة مركبة من الشكل $Z' = aZ + b$ مع $|a| = 1$
إذن هو إما دوران أو انسحاب.
- إذا كان $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$ فإن $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = 1$ وبالتالي $Z' = Z + e^{i\theta_2} b_1 + b_2$ إذن $r_2 \circ r_1$ انسحاب.
- إذا كان $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$ فإن $r_2 \circ r_1$ دوران زاويته $\theta_1 + \theta_2$.

مركب دوران و انسحاب

مبرهنة

إذا كان t انسحاباً و r دوران زاويته θ حيث $\theta \neq 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإن rot و lor هما دورانين زاوية كل منهما θ .

الإثبات

في المستوي الوجه تكون الكتابة المركبة لـ r و t هي على التوالي $Z' = e^{i\theta} Z + b_1$ و $Z' = Z + b_2$
ومنه الكتابة المركبة لـ rot هي $Z' = e^{i\theta} Z + b_1 + e^{i\theta} b_2$
بما أن $e^{i\theta} \neq 1$ فإن rot دوران زاويته θ
بنفس الكيفية نبين أن lor هو دوران زاويته θ .

مركز الدوران الذي يحول (A, B) إلى (A', B')

إذا كان r دوران مركزه النقطة I يحول A إلى A' و B إلى B' فإن:
(1) $IA = IA'$ و (2) $IB = IB'$

من (1) نستنتج أن I تنتمي إلى محور $[AA']$ ومن (2) نستنتج أن I تنتمي إلى محور $[BB']$
إذن I تنتمي إلى تقاطع محوري $[AA']$ و $[BB']$

نتيجة

- إذا كان $r_2 \circ r_1$ دوران فإن لتعيين مركزه نبحث عن صورتين لنقطتين مختارتين بالدوران $r_2 \circ r_1$ ونتبع نفس الخطوات السابقة.
- إذا كان $r_2 \circ r_1$ انسحاباً فإنه لتعيين شعاعه نبحث عن A' صورة نقطة مختارة A وعندئذ $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع مركزه النقطة O بحيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ عين طبيعة التحويلات التالية:
(أ) $f = r(B, -\frac{\pi}{2}) \circ r(A, \frac{\pi}{2})$ (ب) $g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(A, \frac{\pi}{2})$
(ج) $h = S_O \circ r(A, \frac{\pi}{2})$ حيث S_O تناظر مركزي مركزه النقطة O

✓ الحل

(أ) بما أن $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$ فإن f انسحاب.

صورة A بالدوران $r(A, \frac{\pi}{2})$ هي النقطة A وصورة A بالدوران $r(B, -\frac{\pi}{2})$ هي C

إذن شعاع الانسحاب هو \overrightarrow{AC} وعليه $f = t_{\overrightarrow{AC}}$

(ب) g هو دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة I .

$$g(A) = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(A, \frac{\pi}{2})(A) = B$$

$$g(B) = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(A, \frac{\pi}{2})(B) = C$$

إذن I تنتمي إلى تقاطع محوري $[AB]$ و $[BC]$ أي I منطبقة على O

$$g = r(O, \frac{\pi}{2}) \text{ وعليه}$$

(ج) S_O تناظر مركزي مركزه النقطة O فهو إذن دوران مركزه O وزاويته π .

$$h = r(O, \pi) \circ r(A, \frac{\pi}{2}) \text{ إذن}$$

بما أن $\pi + \frac{\pi}{2} = 2k\pi$ فإن h دوران زاويته $3\frac{\pi}{2}$.

صورة B بالدوران $r(A, \frac{\pi}{2})$ هي D وصورة D بالتناظر S_O هي B

إذن B صامدة وبالتالي مركز الدوران h هي B وعليه $h = r(B, 3\frac{\pi}{2})$

8. مركب تحاكيات وإنسحابات

1-8 مركب تحاكيتين مختلفي المركز

مبرهنة

h_1 تحاكي مركزه A ونسبته k_1 و h_2 تحاكي مركزه B ونسبته $k_2 \neq 1$ إذن :
إذا كان $k_1 k_2 = 1$ فإن $h_2 \circ h_1$ إنسحاب شعاع توجيهه (AB)
إذا كان $k_1 k_2 \neq 1$ فإن $h_2 \circ h_1$ تحاكي نسبته $k_1 k_2$ ومركزه ينتمي إلى (AB)

الإثبات

نختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا (A, \vec{u}, \vec{v}) بحيث محور الفواصل هو (AB) .

لتكن h لاحقة B (عند حقيقي غير معلوم)

الكتابة المركبة لـ h_1 هي إذن $Z' = k_1 Z = f_1(Z)$

والكتابة المركبة لـ h_2 هي $Z' = k_2(Z - b) + b = f_2(Z)$

ومنه الكتابة المركبة لـ $h_2 \circ h_1$ هي :

$$Z' = f_2(f_1(Z)) = k_2(k_1 Z - b) + b = k_2 k_1 Z + b(1 - k_2)$$

- إذا كان $k_1 k_2 = 1$ فإن $h_2 \circ h_1$ إنسحاب شعاعه \vec{w} لاحقه $b(1 - k_2)$

وبما أن b و k_2 أعداد حقيقية غير معدومة فإن \vec{w} مرتبط خطيا مع \vec{u}

وبالتالي فهو شعاع توجيه لـ (AB)

- إذا كان $k_1 k_2 \neq 1$ فإن $h_2 \circ h_1$ تحاكي نسبته $k_2 k_1$ ومركزه النقطة الصامدة I ذات

$$\omega = \frac{b(1 - k_2)}{1 - k_1 k_2}$$

بما أن ω عند حقيقي فإنها تقع على (AB)

- تعيين مركز التحاكي $h_2 \circ h_1$

إذا كان $h_2 \circ h_1$ تحاكي فإن لإيجاد مركزه

I نختار نقطة M لا تنتمي إلى (AB) ونعلم

النقطة M_1 بحيث $M_1 = h_1(M)$ ثم النقطة M'

بحيث $M' = h_2(M_1)$

عندئذ النقطة I هي تقاطع (AB) و (MM') .

هناك طريقة ثانية لتعيين المركز I بحيث نختار نقطة A أو B ونبحث عن صورتها

بالتحاكي $h_2 \circ h_1$.

$$L' = k_2 k_1 \vec{IA}$$

ومنه نستنتج أن I هي مرجع الجملة $(A, k_2, k_1), (A, -1)$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع، h_1 هو تحاكي مركزه D ونسبته $\frac{1}{2}$ ، h_2 تحاكي مركزه C ونسبته 3 . بين أن $h_2 \circ h_1$ تحاكي منشأ مركزه I

✓ الحل

بما أن $k_2 k_1 = \frac{3}{2} \neq 1$ فإن $h_2 \circ h_1$ تحاكي نسبته $\frac{3}{2}$ ومركزه النقطة I

$$\text{لدينا } h_2 \circ h_1(D) = h_2(D) = D'$$

$$\vec{CD'} = 3 \vec{CD} \text{ تكافئ } h_2(D) = D'$$

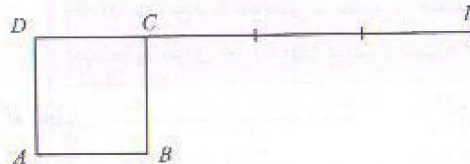
$$\vec{ID'} = \frac{3}{2} \vec{ID} \text{ ولدينا أيضا}$$

$$\vec{IC} + \vec{CD'} = \frac{3}{2} \vec{IC} + \frac{3}{2} \vec{CD}$$

$$-\frac{1}{2} \vec{IC} = -3 \vec{CD} + \frac{3}{2} \vec{CD}$$

$$-\frac{1}{2} \vec{IC} = -\frac{3}{2} \vec{CD}$$

$$\vec{IC} = 3 \vec{CD} \text{ ومنه } \vec{CI} = -3 \vec{CD}$$



2-8 مركب تحاكي وإنسحاب

مبرهنة

h تحاكي مركزه A ونسبته k بحيث $k \neq 1$ و I إنسحاب شعاعه \vec{u} حيث $\vec{u} \neq 0$

إذن toh و $h \circ I$ هما تحاكيتان نسبتهما k ومركزيهما متواجدان على المستقيم (A, \vec{u})

الإثبات

لنختار معلما متعامدا ومتجانسا مباشرا مركزه A بحيث يكون محور الفواصل محمولا على

المستقيم (A, \vec{u})

لاحقة الشعاع \vec{u} هي عدد حقيقي a

الكتابة المركبة لـ h هي $Z' = f_1(Z) = kZ$ والكتابة المركبة لـ I هي $Z' = f_2(Z) = Z + a$

إذن الكتابة المركبة لـ toh هي $Z' = f_2(f_1(Z)) = kZ + a$

بما أن $k \neq 1$ فإن toh هو تحاكي نسبته k ومركزه النقطة I لاحقتها $\omega = \frac{a}{1-k}$

لكن ω عند حقيقي غير معدوم إذن I موجودة على المستقيم (A, \vec{u})

وبنفس الكيفية نبين أن hot هو تحاكي نسبته k ومركزه I موجودة على (A, u)

- تعيين مركز hot

لإيجاد المركز I نختار نقطة M غير موجودة على (A, u) ونعلم النقطة M_1 بحيث:

$$M' = t(M_1) \text{ ونعلم النقطة } M' \text{ بحيث } M_1 = h(M)$$

النقطة I هي تقاطع (A, u) مع (MM') .

هناك طريقة ثانية لتعيين I .

نختار نقطة A ونبحث عن صورتها A' بالزكيب toh

I هي مرجح الجملة $(A, 1), (A, -k)$ حيث $AA' = u$

تمرين تدريبي

$ABCD$ مربع، h تحاكي مركزه A ونسبته $\frac{3}{2}$ و t إنسحاب شعاعه AB ما هي طبيعة التحويل toh معيناً عناصره المميزة ثم أنشئ صورة $ABCD$ بهذا التحويل.

الحل

بما أن $k \neq 1$ و $A \neq B$ فإن toh تحاكي نسبته $k = \frac{3}{2}$ ومركزه النقطة I تنتمي إلى (A, u)

أي تنتمي إلى (AB)

نختار النقطة A ونبحث عن صورتها A' بالتحاكي toh

$$toh(A) = t(h(A)) = B \text{ ومنه نستنتج } \vec{IB} = \frac{3}{2} \vec{IA}$$

$$\vec{IB} = \frac{3}{2} \vec{IA} \text{ يكافئ } \vec{IA} + \vec{AB} = \frac{3}{2} \vec{IA} \text{ يكافئ } \vec{IA} - 2\vec{AB}$$

$$toh(A) = B$$

$$toh(B) = t(h(B)) = B'$$

$$h(B) = B_1 \text{ يكافئ } \vec{AB_1} = \frac{3}{2} \vec{AB}$$

$$\text{ولدينا } \vec{B_1B'} = \vec{AB}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} \vec{AB_1} = \frac{3}{2} \vec{AB} \\ \vec{B_1B'} = \vec{AB} \end{cases}$$

لدينا $h(C) = C_1$ و $toh(C) = t(h(C)) = C'$

$$\text{ومنه ينتج } \vec{AC_1} = \frac{3}{2} \vec{AC} \text{ و } \vec{C_1C'} = \vec{AB}$$

لدينا $h(D) = D_1$ و $toh(D) = t(h(D)) = D'$

$$\text{ومنه ينتج } \vec{AD_1} = \frac{3}{2} \vec{AD} \text{ و } \vec{D_1D'} = \vec{AB}$$

9. مركب تناظرين محوريين

مبرهنة

σ_1 تناظر محوري محوره (Δ_1) ، σ_2 تناظر محوري محوره (Δ_2) يختلف عن (Δ_1)

- إذا كان (Δ_1) يوازي (Δ_2) فإن $\sigma_2 \circ \sigma_1$ إنسحاب.

- إذا كان (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعين فإن $\sigma_2 \circ \sigma_1$ دوران.

الإثبات

• حالة (Δ_1) يوازي (Δ_2) :

لتكن M نقطة كيفية صورتها M_1 بـ σ_1 :

$$\begin{cases} (MM_1) \perp (\Delta_1) \\ (MM_1) \cap (\Delta_1) = \{H_1\} \\ \vec{H_1M_1} = -\vec{H_1M} \end{cases} \text{ يعني } \sigma_1(M) = M'$$

ولتكن M' صورة M_1 بالتناظر σ_2 :

$$\begin{cases} (M_1M') \perp (\Delta_2) \\ (M_1M') \cap (\Delta_2) = \{H_2\} \\ \vec{H_2M'} = -\vec{H_2M_1} \end{cases} \text{ تعني } \sigma_2(M_1) = M'$$

$$\vec{MM'} = \vec{MH_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{H_2M'} = \vec{H_1M_1} + \vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2} + \vec{M_1H_2}$$

$$= 2(\vec{H_1M_1} + \vec{M_1H_2}) = 2\vec{H_1H_2}$$

بما أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان فإن البعد بينهما ثابت ويساوي H_1H_2

ومنه الشعاع $2\vec{H_1H_2}$ ثابت إذن $\sigma_2 \circ \sigma_1$ إنسحاب شعاعه $2\vec{H_1H_2}$

• حالة (Δ_1) يقطع (Δ_2) :

نضع $\{O\} = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$

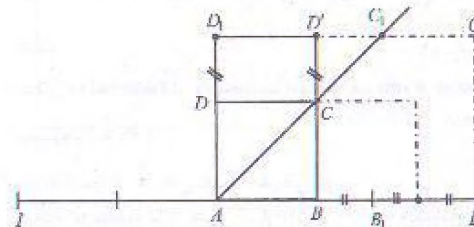
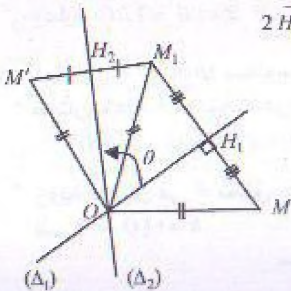
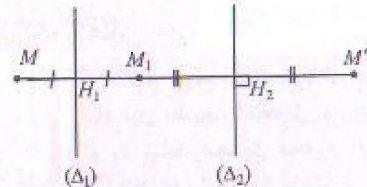
$$\sigma_2 \circ \sigma_1(O) = \sigma_2(O) = O$$

إذن O نقطة صامدة بالتحويل $\sigma_2 \circ \sigma_1$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(M) = \sigma_2(M_1) = M'$$

$$[MM_1] \text{ محور } (\Delta_1) \text{ تعني أن } \sigma_1(M) = M_1$$

$$[M_1M'] \text{ محور } (\Delta_2) \text{ تعني أن } \sigma_2(M_1) = M'$$



بما أن (Δ_1) محور القطعة المستقيمة $[MM_1]$ و O تنتمي إلى (Δ_1)

فإن $OM = OM_1$ (1)

بما أن (Δ_2) محور $[M'M']$ و O تنتمي إلى (Δ_2)

فإن $OM' = OM_1$ (2)

من (1) و (2) نجد $OM' = OM$

لدينا $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = (\vec{OM}, \vec{OM_1}) + (\vec{OM_1}, \vec{OM'}) + 2k\pi$

$= (\vec{OM}, \vec{OH_1}) + (\vec{OH_1}, \vec{OM_1}) + (\vec{OM_1}, \vec{OH_2}) + (\vec{OH_2}, \vec{OM'})$

$= 2(\vec{OH_1}, \vec{OM_1}) + 2(\vec{OM_1}, \vec{OH_2}) + 2k\pi$

$= 2(\vec{OH_1}, \vec{OH_2}) + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$

بوضع $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = 2\theta + 2k\pi$ يكون لدينا $(\Delta_1, \Delta_2) = \theta$

إذن التحويل $\sigma_2 \circ \sigma_1$ هو دوران مركزه النقطة O وزاويته 2θ

تمرين تدريبي

مربع من المستوى بلوحه مركزه النقطة O

(1) عين طبيعة التحويل f_1 تناظر محوري محوره (AB)

و g_1 تناظر محوري محوره (CD)

(2) عين $h_2 = g_2 \circ f_2$ حيث f_2 تناظر محوري محوره (AC)

و g_2 تناظر محوري محوره (BD)

✓ الحل

(1) بما أن (AB) يوازي (CD) فإن h_1 هو إنسحاب

نختار النقطة B ونبحث عن صورتها بالتحويل h_1

$h_1(B) = g_1 \circ f_1(B) = g_1(B) = B'$

حيث B' نظيرة B بالنسبة إلى C

وعليه $\vec{u} = \vec{BB'} = 2\vec{BC}$ إذن $h_1 = t_{2BC}$

(2) بما أن (AC) و (BD) متقاطعان في O فإن h_2 دوران مركزه النقطة O

نختار نقطة A ونبحث عن صورتها بالتحويل h_2

$h_2(A) = g_2 \circ f_2(A) = g_2(A) = C$

زاوية الدوران هي θ تحقق $\theta = (\vec{OA}, \vec{OC}) = -\pi$

إذن $h = r(O, -\pi)$

10 - تفكيك دوران و إنسحاب إلى جداء تناظرين محوريين

1-10 تفكيك دوران

ليكن $r(O, \theta)$ دوران مركزه النقطة O وزاويته θ .

- إذا كان $\theta = 2k\pi$ فإن $r(O, \theta) = Id = \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_1}$ حيث Δ مستقيم كيفي

- إذا كانت $\theta \neq 2k\pi$ ، ليكن (Δ_1) مستقيم كيفي من المستوى يشمل النقطة O .

وليكن (Δ_2) صورة (Δ_1) بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\theta}{2}$

وباستعمال مبرهنة الفقرة (9) نجد $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1} = r(O, \theta)$

وبما أن (Δ_1) كيفي فإن التفكيك ليس وحيدا.

2-10 تفكيك إنسحاب

ليكن t_u إنسحاب شعاعه $\vec{u} \neq \vec{0}$ وليكن (Δ_1) مستقيما عموديا على \vec{u}

وليكن (Δ_2) صورة (Δ_1) بالإنسحاب الذي شعاعه $\frac{1}{2}\vec{u}$

حسب المبرهنة الموجودة في الفقرة (9) فإن $\sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1} = t_u$

تمرين تدريبي

في المستوى بلوحه $ABCD$ مربع قطراه $[AC]$ ، $[BD]$ حيث $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$

ليكن $r(A, \frac{\pi}{2})$ دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و $\sigma_{(AC)}$ تناظر محوري محوره (AC)

(1) نضع $h = \sigma_{(AC)} \circ r(A, \frac{\pi}{2})$

(أ) عين صورتي النقطتين A و B بالتحويل h .

(ب) عين طبيعة التحويل h .

(2) عين صورة المربع $ABCD$ بالتحويل h .

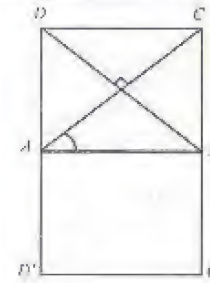
✓ الحل

(1) (أ) $h(A) = \sigma_{(AC)}(A) = A$ لأن $r(A, \frac{\pi}{2})(A) = A$ و A تنتمي إلى (AC)

$h(B) = \sigma_{(AC)}(D) = B$

(ب) تعيين طبيعة التحويل h

$r(A, \frac{\pi}{2}) = \sigma_{(AC)} \circ \sigma_{(AB)}$



وعليه $h = \sigma_{(AC)} \circ (\sigma_{(AC)} \circ \sigma_{(AB)}) = (\sigma_{(AC)} \circ \sigma_{(AC)}) \circ \sigma_{(AB)} = Id \circ \sigma_{(AB)} = \sigma_{(AB)}$

ومنه h هو تناظر محوري محوره (AB)

(2) $h(A) = A$ و $h(B) = B$ و $h(C) = C'$ حيث B منتصف $[CC']$

$h(D) = D'$ حيث A منتصف $[DD']$

إذن صورة المربع $ABCD$ هو المربع $A'B'C'D'$

11- تركيب تشابهين كيفيين

11-1 مركب تشابهين كيفيين

مرهنة

تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر.

تركيب تشابهين غير مباشرين هو تشابه مباشر.

تركيب تشابه مباشر وآخر غير مباشر هو تشابه غير مباشر.

الإثبات

إذا كان S_1 و S_2 تشابهان نسبتيهما k_1 و k_2 فإن $S_2 \circ S_1$ هو تشابه نسبته $k_2 k_1$

- إذا كان S_1 و S_2 تشابهان مباشرين يحفظان الزوايا للوجهة فإن $S_2 \circ S_1$ يحفظ الزوايا للوجهة

إذن $S_2 \circ S_1$ هو تشابه مباشر.

إذا كان S_1 و S_2 تشابهان غير مباشرين فإن المركب $S_2 \circ S_1$ يحفظ الزوايا للوجهة

إذن هو تشابه مباشر.

بنفس الطريقة نبين أن القسم الثالث من المبرهنة.

11-2 مركب تشابهين مباشرين لهما مركز

- المركب $S_2 \circ S_1$ تشابه مباشر S نسبته k وزاويته θ وكتايته المركبة $Z' = k_1 e^{i\theta_1} Z + b_1$

والتشابه المباشر S_2 نسبته k_2 وزاويته θ_2 وكتايته المركبة $Z' = k_2 e^{i\theta_2} Z + b_2$

هو تشابه مباشر نسبته $k_2 k_1$ وزاويته $(\theta_1 + \theta_2)$ وكتايته المركبة

$$Z'' = k_1 k_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} Z + b_1 k_2 e^{i\theta_2} + b_2$$

- التحويل العكسي لتشابه مباشر S نسبته k وزاويته θ ومركزه I هو التشابه المباشر S^{-1}

نسبته $\frac{1}{k}$ وزاويته $-\theta$ ومركزه I .

ملاحظة

كل تشابه غير مباشر S يكتب على الشكل $S = S_1 \circ \sigma$ حيث S_1 تشابه مباشر

و σ تناظر محوري.

تمرين تدريبي

ABC مثلث من المستوي الوجه S_1 تشابه مباشر مركزه A بحيث $S_1(B) = C$

$S_2(C) = A$ بحيث S_2 تشابه مباشر مركزه B

$S_3(A) = B$ بحيث S_3 تشابه مباشر مركزه C

نضع $\sigma = S_1 \circ S_2 \circ S_3$

(1) حدد $\sigma(B)$

(2) استنتج أن σ هو تناظر مركزي مركزه B .

الحل

$$\sigma(B) = S_3 \circ S_2 \circ S_1(B) = S_3 \circ S_2(C) = S_3(A) = B \quad (1)$$

إذن B صامدة بالتحويل σ

$$(2) \quad S_1 \text{ تشابه مباشر نسبته } \frac{AC}{AB} \text{ وزاويته } (\vec{AC}, \vec{AB})$$

$$S_2 \text{ تشابه مباشر نسبته } \frac{BA}{BC} \text{ وزاويته } (\vec{BC}, \vec{BA})$$

$$S_3 \text{ تشابه مباشر نسبته } \frac{CB}{CA} \text{ وزاويته } (\vec{CA}, \vec{CB})$$

$$\sigma = S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S_3 \circ (S_2 \circ S_1)$$

$$S_2 \circ S_1 \text{ هو تشابه نسبته } \frac{AC}{AB} \times \frac{BA}{BC} \text{ أي } \frac{AC}{BC} \text{ وزاويته } (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA})$$

$$\sigma \text{ هو تشابه نسبته } \frac{AC}{BC} \times \frac{CB}{CA} \text{ أي } 1 \text{ وزاويته } (\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi$$

$$\text{إذن } \sigma \text{ تقايس وبما أن هذا التقايس له نقطة صامدة } B$$

فإن σ هو دوران مركزه B وزاويته π (تناظر مركزي مركزه B).

تطبيقاً



تطبيق 1

تحديد الكتابة المركبة لتحويل عكسي

تحويل في المستوى الذي يرفق بكل نقطة $M(x, y)$ النقطة $M'(x', y')$ بحيث $x' = x - 2y + 1$ و $y' = 2x + y - 1$

- بين أن الكتابة المركبة لـ T هي $Z' = (1+2i)Z + 1 - i$
- بين أن النقطة $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T .
- بين أن الكتابة المركبة لـ T^{-1} هي $Z' = \frac{1}{5}(1-2i)Z + \frac{1}{5}(1+3i)$

الحل

$$Z' = x' + iy' = (x - 2y + 1) + i(2x + y - 1) = (x + iy) + 2i^2y + 2ix + 1 - i = Z - 2iZ + 2iZ + 1 - i = Z + 1 - i$$

$$Z = \frac{1-i}{1-(2i+1)} = \frac{1-i}{-2i} = \frac{1-i}{-2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i-1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

إذن $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T .

$$T(M) = M' \text{ تكافئ } T^{-1}(M') = M$$

$$Z = \frac{1}{5}(1-2i)Z' + \frac{1}{5}(1+3i) \text{ تكافئ } Z' = (1+2i)Z + 1 - i$$

$$Z' = \frac{1}{5}(1-2i)Z + \frac{1}{5}(1+3i) \text{ هي } T^{-1} \text{ لـ } T$$

تطبيق 2

دراسة طبيعة مركب دوراتين

ليكن r_1 و r_2 دوراتين مركزهما O وزاويتيها $\frac{\pi}{2}$ و θ على الترتيب.

θ عدد حقيقي. عين العدد الحقيقي θ بحيث:

(أ) تطبيق حيادي Id .

(ب) تناظر مركزي مركزه النقطة O .

الحل

(أ) لكي يكون $r_2 \circ r_1$ تطبيق حيادي يجب أن يكون $\theta + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ لأن $r_2 \circ r_1(O) = O$

$$\text{ومن ثم } \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

(ب) حتى يكون $r_2 \circ r_1$ تناظراً مركزياً يجب أن يكون $\theta + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$

$$\text{ومن ثم } \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

التعرف على طبيعة تحويل

O نقطة معطاة من المستوى، ترفق بكل نقطة M مختلفة عن O النقطة M' بحيث المثلث OMM' متقايس الأضلاع مباشر. لتكن M' نظيرة I منتصف القطعة $[OM]$ بالنسبة إلى O .

- عين التحويل الذي يحول M إلى M'
- عين التحويل الذي يحول M' إلى M
- بين أن التحويل T الذي يرفق النقطة M بالنقطة M' هو تشابه مباشر.

الحل

$$(1) \text{ بما أن } OM = OM' \text{ و } \angle(MO, M'O) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

فإن التحويل الذي يحول M إلى M' هو:

دوران r مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(ب) بما أن M' نظيرة I بالنسبة إلى O

$$\text{فإن } \vec{OM'} = -\vec{OI} \text{ و } \vec{OM} = \vec{OI} \text{ إذن } \vec{OM'} = -\vec{OM}$$

ومن ثم صورة M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه النقطة O ونسبته $-\frac{1}{2}$

$$M \xrightarrow{r(O, \frac{\pi}{3})} M_1 \xrightarrow{h(O, -\frac{1}{2})} M'$$

$$S = h \circ r = h \circ r(O, \frac{\pi}{3}) = S_1 \circ S_2 = S_1(O, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}) \circ S_2(O, 1, \frac{\pi}{3})$$

إذن S تشابه مباشر مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ أي $\frac{4\pi}{3}$

تطبيق 4

صورة دائرة بتشابه مباشر

المستوي الموجه مزود بمعلم متعامد ومتجانس (o, \vec{i}, \vec{j}) ، لتكن النقطة $A(1, -1)$ ، $B(2, -3)$ ، $C(2, -1)$ وليكن S تشابها مباشرا بحيث $S(A) = B$ و $S(O) = C$ (1) ما هي نسبة التشابه المباشر S ؟
(ب) لتكن D نقطة معرفة بإحداثياتها $(0, 1)$ ونضع $S(D) = E$ ،
- بين أن $CE = \sqrt{2}$
- ثم استنتج أن E تنتمي إلى الدائرة (C_1) يطلب تعيينها ثم رسمها.
- بين أن $BE = \sqrt{10}$
- ثم استنتج أن E تنتمي إلى دائرة (C_2) يطلب تحليلها ورسمها.
(2) استنتج من الأسئلة السابقة أن إحداثيتي E هي $(1, 0)$ أو $(3, 0)$.

الحل

(1) بما أن $S(O) = C$ و $S(A) = B$

فإن نسبة التشابه هي $k = \frac{BC}{OA}$

لكن $OA = \sqrt{2}$ و $BC = 2$

إذن $k = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(ب) بما أن $S(O) = C$ و $S(D) = E$

فإن $\frac{CE}{OD} = \sqrt{2}$

ومنه $CE = \sqrt{2} OD = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

E تنتمي إلى الدائرة (C_1) التي

مركزها C وطول نصف قطرها $\sqrt{2}$

(ج) $S(A) = B$ و $S(D) = E$ ومنه ينتج $\frac{BE}{AD} = \sqrt{2}$

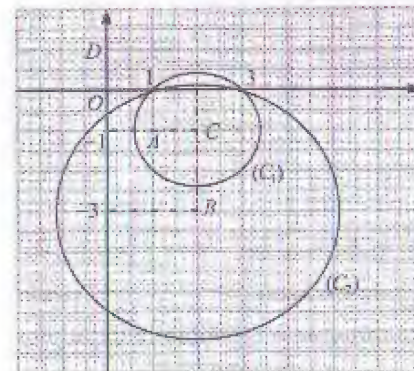
ومنه $BE = \sqrt{2} AD$ لكن $AD = \sqrt{5}$ إذن $BE = \sqrt{10}$

بما أن $BE = \sqrt{10}$ فإن E تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$

(2) من السؤال 1 E تنتمي إلى $(C_1) \cap (C_2)$

إذا كانت إحداثيتا E هي $(1, 0)$ فإن $(\vec{OD}, \vec{CE}) \neq (\vec{OA}, \vec{CB})$ (مختلفين في الاتجاه).

ومنه إحداثيتا E هي $(3, 0)$.



تطبيق 5

تفكيك تحويل نقطي إلى مركب تحويلين

المستوي الموجه مزود بمعلم متعامد ومتجانس (o, \vec{u}, \vec{v}) و T تحويل نقطي كتابته المركبة $Z' = i\bar{Z}$
(1) بين أن $T = r \circ f$ حيث f تناظر محوري محوره محور الفواصل و r دوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$
(2) هل نستطيع التأكيد أن $S = r \circ f$ ؟
(3) A نقطة لاحقتها $1+i$ ،
(ا) ما هي لاحقة $T(A)$ ؟ (ب) استنتج أن T هو تناظر يطلب تعيين محوره.

الحل

(1) الكتابة المركبة لـ f هي $Z' = \bar{Z}$ والكتابة المركبة لـ r هي $Z' = e^{i\frac{\pi}{2}} Z = iZ$

$$M \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{r} M'$$

حيث Z_1 لاحقة M_1 و Z' لاحقة M' عندئذ ،

$$T = r \circ f \quad \text{إذن} \quad Z' = iZ_1 = i(\bar{Z})$$

$$M \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{r} M''$$

و $Z_2 = iZ$ و $Z' = \bar{Z}_2 = -i\bar{Z}$ إذن $T = r \circ f$

(ا) لاحقة $T(A)$ هي $i\bar{Z}_A$

ومنه $i\bar{Z}_A = i(1+i) = i(1-i) = 1+i$

(ب) بما أن T ليس حياذيا وله نقطتان صامتتان O و A

فإن T تناظر محوري محوره المستقيم (OA) .

تطبيق 6

تعيين العناصر المميزة لتشابه مباشر

S تشابه مباشر كتابته المركبة $Z' = (1+i)Z + 2$ ، الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' .
(1) ما هي نسبة S ؟ B نقطة لاحقتها $2i$ ما هي لاحقة $S(B)$ ؟
(2) ليكن Z_1 لاحقة BM و Z_2 لاحقة MM' بين أن $Z_2 = iZ_1$ ، ثم استنتج أن الثلاث $BM, MM',$ قائم ومتساوي الساقين.

✓ الحل

(1) $a = 1+i$ و $b = 2$ إذن نسبة التشابه المباشر S هي $|a| = \sqrt{2}$

لاحظ النقطة $S(B)$ هي $Z_B = (1+i)(2i) + 2 = 2i$ إذن B صامدة بالتحويل S .

(2) لدينا $Z_1 = Z - Z_B = Z - 2i$ و $Z_2 = Z' - Z_B = Z' - 2i$ ومنه ينتج $Z_2 = iZ_1$

بما أن $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2}$ و $MM' = MB$ فإن $Z_2 = iZ_1$

وبالتالي المثلث BMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

تطبيق 7 التشابه المباشر والمثلثات المتشابهة

في المستوى المركب الزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر، لتكن النقط:

$1+i, 5+i, 2i, -1, i$ لواحقتها على الترتيب B, A', C, B, A

ولیکن S التشابه المباشر بحيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

(1) عين الكتابة المركبة لـ S .

(2) عين لاحقة C' بحيث يكون المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهين في الاتجاه المباشر.

✓ الحل

(1) الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = aZ + b$

(1) $S(A) = A'$ تكافئ $5+i = a(1+i) + b$

(2) $S(B) = B'$ تكافئ $1+i = a(-1) + b$

ب طرح (2) من (1) نجد $a = 2(1-i)$ ثم نعوض a في (2) نجد $b = 3-i$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = 2(1-i)Z + 3-i$

(2) حتى يكون ABC و $A'B'C'$ متشابهين في الاتجاه المباشر يجب أن يكون $S(C) = C'$

$S(C) = C'$ تكافئ $Z_C = -1-5i$ تكافئ $Z_C = 2(1-i)(-2i) + 3-i$

تطبيق 8 تعيين العناصر المميزة لتشابهات مباشرة

ABC مثلث متقايس الأضلاع مباشر من المستوى الوجه ومركز ثقله

النقطة G ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$

عين نسبة وزاوية كل تشابه من التشابهات المباشرة التالية:

(أ) $S_1(I) = C$ و $S_1(B) = B$ مركزه النقطة B

(ب) $S_2(A) = C$ و $S_2(I) = I$ مركزه النقطة I

✓ الحل

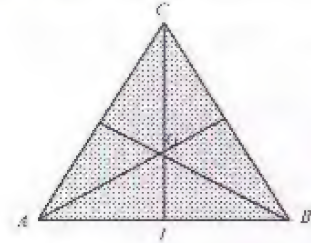
(أ) S_1 نسبته 2 لأن $\frac{BC}{BI} = 2$ لأن $BC = 2BI$

وزاويته θ_1 حيث $\theta_1 = (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$

إذن $S_1(B, 2, -\frac{\pi}{3})$

(ب) S_2 نسبته $\sqrt{3}$ لأن $\frac{IC}{I} = \frac{\sqrt{3}IA}{IA} = \sqrt{3}$ وزاويته θ_2

حيث $\theta_2 = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = -\frac{\pi}{2}$ إذن $S_2(I, \sqrt{3}, -\frac{\pi}{2})$



تعيين صور نقط بتشابه مباشر

في المستوى الوجه نعتبر العین $ABCD$ الذي مركزه النقطة O بحيث:

$S(A) = B$ و $S(B) = C$ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و $S(A) = B$

(1) حدد نسبة وزاوية التشابه S .

(2) بين أن صورة النقطة O هي منتصف $[BC]$

(3) بين أن صورة النقطة D هي مركز ثقل المثلث BCD .

✓ الحل

(1) نسبة التشابه S هي $k = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\sqrt{3}BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

وزاويته θ تحقق $\theta = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6}$

(2) بما أن صورة $[AC]$ هي $[BC]$ و O منتصف $[AC]$ فإن صورة

النقطة O هي منتصف $[BC]$ (لأن التشابه المباشر يحفظ المرح).

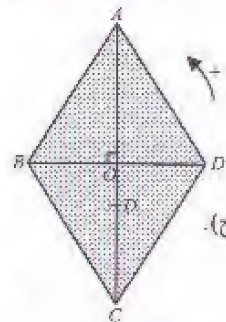
(3) لتكن D' صورة D بالتشابه S إذن $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}) = \frac{\pi}{6}$

ومنه ينتج أن D' تنتمي إلى المستقيم (AC)

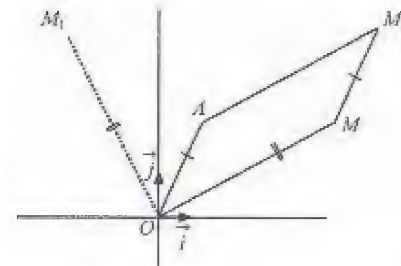
$CD' = \frac{CD}{\sqrt{3}}$ و $S(D) = D'$ و $S(C) = C$

لدينا $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{CD'}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه ينتج $\frac{CD'}{CD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أي $CD' = \frac{1}{3}AC$

لكن $CO = \frac{1}{2}AC$ ومنه $CD' = \frac{2}{3}CO$ إذن D' هي مركز ثقل المثلث BCD .



✓ الحل



(1) M_1 هي صورة M بدوران O بزاوية $(0, \frac{\pi}{2})$

و M_2 هي صورة M

بانسحاب شعاعه $\vec{OA} = \vec{u}$ لاحقة a

(2) الكتابة المركبة للتحويلين T_1 و T_2 هي:

على التوالي $Z' = Z + a$ و $Z' = iZ$

لتكن f صامتة بالتحويل $T_1 \circ T_2$

الكتابة المركبة لـ $T_1 \circ T_2$ هي $Z' = iZ + ia$

$Z = iZ + ia$ يكافئ $T_1 \circ T_2(f) = f$

ومنه $Z = (-\frac{1+i}{2})a$

إذن f هي صورة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) من المساواة $\vec{OM'} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$ نجد $Z' = Z_1 + Z_2$ أي $Z' = (i+1)Z + a$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = (i+1)Z + a$

ومنه S هو تشابه مباشر نسبته $k = |i+1| = \sqrt{2}$ وزاويته $\arg(i+1) = \frac{\pi}{4}$

ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $Z_\omega = ia$

(ب) ω هي صورة A بدوران مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

تطبيق 13

البرهان بواسطة التشابه

في المستوى المركب الزود بمعلم متعاقد ومتجانس (a, \vec{i}, \vec{j})

لتكن النقط C', B', A', C, B, A لواحقتها على التوالي:

$-2+3i, 3i, 2+i, 1+i, 1, -i$

بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان في الاتجاه المباشر.

✓ الحل

ليكن S تشابهها مباشرا يحول A إلى A' و B إلى B' و C إلى C'

الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = aZ + b$

(1) $S(A) = A'$ تكافئ $2+i = a(1) + b$ (1)

(2) $S(B) = B'$ تكافئ $3i = a(1+i) + b$ (2)

بطرح (2) من (1) نجد $2-2i = a(-1-i)$ ومنه نجد $a = 2-i$

نعوض a في (2) نجد $b = i$

إذن الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = 2-iZ + i$

السؤال المطروح هل $S(C) = C'$ ؟

لاحقة $S(C)$ هي $2-i(1+i) + i = 2+3i$ أي $2+3i$

إذن $S(C) = C'$ ومنه فإن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان في الاتجاه المباشر.

تطبيق 14

البرهان باستعمال التشابه

C, B, A ثلاث نقاط على استقامة واحدة بهذا الترتيب بحيث $AB = 6$ و $BC = 4$

(C) هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ و (d) هو محور القطعة $[BC]$ يقطع (C)

في M و M' بحيث $(\vec{MA}, \vec{MC}) = \frac{\pi}{2}$ ، المستقيم (MB) يقطع (MA) في N

وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه N وبحيث $S(M) = B$

(1) بين أن زاوية S هي $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{3}{4}$

(2) ما هي صورة (d) بـ S ؟ ما هي صورة (MN) بـ S ؟

(ب) استنتج أن $S(M') = A$

(3) ما هي صورة H تقاطع (MM') مع (BC) بالتحويل S ؟ ثم استنتج أن

المستقيم (NH) مماس للدائرة التي قطرها $[AB]$

✓ الحل

(1) $\hat{CMM} = \hat{MAC}$ (1) (محيطيتان تحصران نفس القوس)

$\hat{CMM} = \hat{MMB}$ (2)

من (1) و (2) نجد $\hat{MAC} = \hat{MMB}$ (3)

وبما أن $\hat{MMB} + \hat{CBM'} = \frac{\pi}{2}$ و $\hat{CBM'} = \hat{NBA}$

فإن $\hat{MAC} + \hat{NBA} = \frac{\pi}{2}$

وعليه يكون $\hat{BNA} = \frac{\pi}{2}$

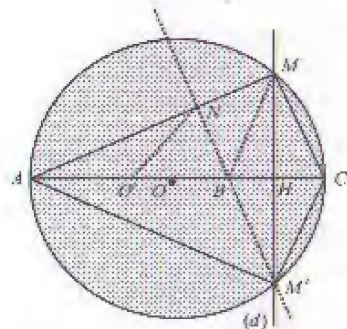
زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه N

هي $(\vec{MN}, \vec{BN}) = -\frac{\pi}{2}$

ونسبته $k = \frac{BN}{MN}$

لدينا $OM^2 = OH^2 + HM^2$ حيث O مركز الدائرة المعطاة

ومنه $HM = 4$



$$T \text{ لدينا } t = \left(\frac{1+i}{2}\right)p + \left(\frac{1-i}{2}\right)q$$

$$U \text{ لدينا } u = \left(\frac{1+i}{2}\right)q + \left(\frac{1-i}{2}\right)m$$

(2) بين أن $u - s = i(1-r)$ ، ثم استنتج أن $SU \perp TR$ و $(SU) \perp (TR)$

✓ الحل

(1) لدينا $f(N) = R$ و $f(M) = M$ ومنه نسبة التشابه المباشر f هي $k = \frac{RM}{NM}$

المثلث NRM قائم في R وحسب نظرية فيثاغورث لدينا $NM^2 = NR^2 + MR^2 = 2MR^2$

وبالتالي $NM = \sqrt{2} MR$

$$k = \frac{RM}{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية التشابه f هي $\theta = (\vec{MN}, \vec{MR}) = -\frac{\pi}{4}$

(ب) الكتابة المركبة لـ f هي $Z' = \frac{1}{2}(1-i)Z + b$

$$(1) \dots m = \frac{1}{2}(1-i)m + b \text{ يعني أن } f(M) = M$$

$$(2) \dots r = \frac{1}{2}(1-i)r + b \text{ يعني أن } f(N) = R$$

ب طرح (2) من (1) نجد $m - r = \frac{1}{2}(1-i)m - \frac{1}{2}(1-i)r$ ومنه $m - r = \frac{1}{2}(1-i)m - \frac{1}{2}(1-i)r$

$$(3) \dots u - s = \left(\frac{1+i}{2}\right)(q - n) + \left(\frac{1-i}{2}\right)(m - p)$$

$$t - r = \left(\frac{1+i}{2}\right)(p - m) + \left(\frac{1-i}{2}\right)(q - n)$$

$$(4) \dots i(t - r) = \left(\frac{1-i}{2}\right)(m - p) + \left(\frac{1+i}{2}\right)(q - n)$$

من (3) و (4) نجد $u - s = i(t - r)$

بما أن $|u - s| = |t - r|$ ولكن $|t - r| = RT$ و $|u - s| = US$ إذن $RT = US$

وبما أن $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ فإن $\arg(u - s) = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{u - s}{t - r} = i$ وعليه $(\vec{RT}, \vec{SU}) = \frac{\pi}{2}$

التمرين تعيين المحل الهندسي

تطبيق 16

في المستوى اللوحه تعتبر دائرتين (C) و (C') مركزيهما على التوالي O و O' ونص قطريهما R متماسكين خارجيا عند A .

نرفق بكل نقطة M من (C) النقطة M' من (C') بحيث $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{\pi}{2}$

$$(1) \dots \sin \alpha = \frac{BN}{AB} = \frac{BN}{6}$$

$$(2) \dots \sin \alpha = \frac{MN}{MM'} = \frac{MN}{2MH} = \frac{MN}{8}$$

من (1) و (2) نجد $k = \frac{BN}{MN} = \frac{3}{4}$

(2) أ - بما أن صورة المستقيم (d) هو مستقيم يعامده (زاوية التشابه هي $-\frac{\pi}{2}$) ويشمل

النقطة B فإن صورة (d) هي (AC) .

- بما أن صورة (MN) هو مستقيم يعامده ويشمل N

فإن صورة (MN) هو المستقيم (AN) .

(ب) $S(MN) = (AM)$ و $S(MM') = (AB)$ و $(MM') \cap (MN) = \{M'\}$

$$(AM) \cap (AB) = \{A\}$$

إذن صورة M' هي A .

(3) بما أن $S([MM']) = [AB]$ و H منتصف $[MM']$ فإن صورتها هي منتصف $[AB]$

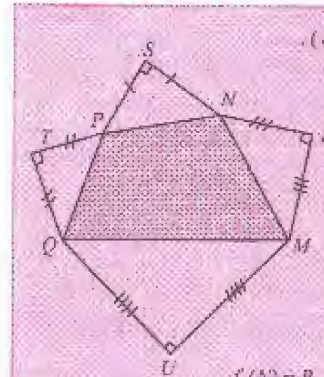
(لأن التشابه يحفظ المرحح).

بما أن $S(H) = O'$ حيث O' منتصف $[AB]$ فإن $(\vec{NH}, \vec{NO'}) = -\frac{\pi}{2}$

وبما أن N تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإن (NH) مماس لها.

تمرين إثبات التعماد بواسطة التشابه

تطبيق 15



نزود المستوى بمعلم متعامد ومتجانس (a, \vec{i}, \vec{j}) .

رباعي في الاتجاه المباشر $MNPQ$.

المثلثات QUM , PTQ , NSP , MRN .

قائمة ومتساوية الساقين خارجية

بالنسبة إلى الرباعي $MNPQ$ وذات اتجاه

مباشر كما في الشكل.

نريد إثبات أن $SU = TR$

وأن المستقيمين (SU) و (TR) متعامدان

لتكن q, p, n, m لواحظ النقط:

Q, P, N, M على الترتيب.

(1) f هو تشابه مباشر مركزه M بحيث $f(N) = R$

(أ) عين نسبة وزاوية f .

(ب) لتكن r لاحقة النقطة R بين أن $r = \left(\frac{1+i}{2}\right)m + \left(\frac{1-i}{2}\right)n$

تقبل أنه لدينا كذلك $s = \left(\frac{1+i}{2}\right)n + \left(\frac{1-i}{2}\right)p$ حيث s لاحقة S

تطبيق 17

تعيين المحل الهندسي

(1) معطى متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الوجه.
 M نقطة تمسح دائرة (C) معادلتها $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
 ننشئ المثلث MOM' القائم في O والمتساوي الساقين بحيث $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{\pi}{2}$.
 ولنكن I منتصف $[MM']$.
 (1) عين معادلة المجموعة (C') مجموعة النقط M' لـ M تمسح (C) .
 ومجموعة النقط Γ مجموعة النقط I لـ M يمسخ (C) .
 (2) بين أن نقط تقاطع (C) و (C') هي نقط من المجموعة Γ .

الحل

(1) - بما أن MOM' مثلث قائم وتساوي الساقين فإن M' صورة M بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
 وبما أن M تمسح الدائرة (C) ذات المركز A فإن M' تمسح (C') صورة (C) بالدوران $r(O, \frac{\pi}{2})$ حيث أن مركزها هو A' صورة A بالدوران $r(O, \frac{\pi}{2})$.
 ونصف قطرها 2.

$$(\vec{OA}, \vec{OA'}) = \frac{\pi}{2}$$

لتكن لاحقة A' صورة A ذات اللاحقة Z_A لدينا $Z_A = iZ_A$ ومنه $A'(0, 2)$ إذن $(C') : x^2 + (y - 2)^2 = 4$

- النقطة I صورة M بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته:

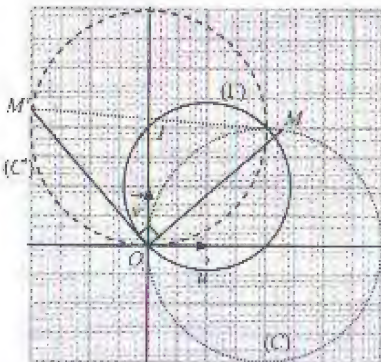
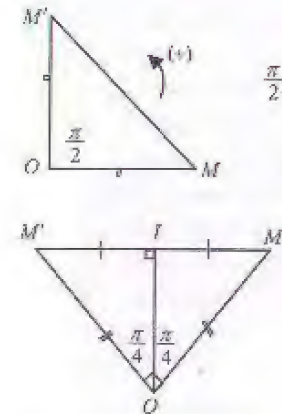
$$k = \frac{OI}{OM} = \frac{OI}{\sqrt{2}OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بما أن M تمسح (C) فإن I تمسح الدائرة Γ

صورة (C) بالتشابه المباشر $S(O, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$

وبحيث نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

أي $\sqrt{2}$ ومركزها A'' صورة A ب S .



(1) بين أنه يوجد دوران يحول (C) إلى (C') زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه ω يطلب تعيينه هندسيا معينا صورة M بهذا الدوران.
 (2) بين أن I منتصف $[MM']$ هي صورة M بالتشابه المباشر f مركزه ω معينا عناصره المميزة.
 (ب) استنتج المحل الهندسي Γ لـ M لـ M تمسح (C) .
 (3) اعط صورة O بالتشابه f وقبسا للزاوية (\vec{OM}, \vec{AI}) .

الحل

(1) بما أن $A \in (C)$ فإن صورتها A' تنتمي إلى (C')

بما أن $(\vec{OA}, \vec{OA'}) = \frac{\pi}{2}$ فإن $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{\pi}{2}$

حيث A' صورة A بدوران زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن ω مركز هذا الدوران هي تقاطع محوري $[AA']$ و $[OO']$

وبما أن $\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ فإن:

M' صورة M بالدوران الذي مركزه ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$

حيث O' صورة O بهذا الدوران.

(2) بما أن المثلث $\omega MM'$ قائم في ω ومتساوي الساقين فإن (ωI) هو النصف الزاوية $M\omega M'$

وعليه $(\vec{\omega M}, \vec{\omega I}) = \frac{\pi}{4}$

نسبة التشابه $k = \frac{\omega I}{\omega M}$

لدينا $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\omega I}{\omega M} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن يوجد تشابه مباشر مركزه النقطة ω ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ يحول M إلى I

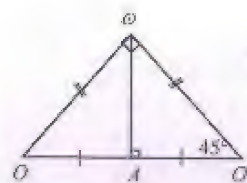
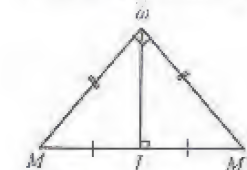
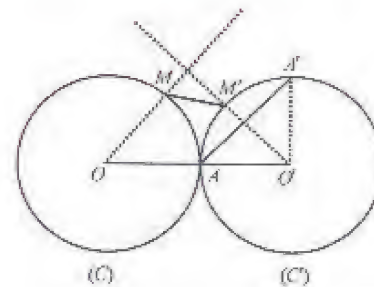
بما أن M تمسح دائرة (C) فإن I تمسح دائرة (C') صورة (C) بالتشابه f .

حيث (C') طول نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2} R$

لدينا (1) $\frac{\omega A}{\omega O} = \frac{\omega A'}{\omega A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و (2) $(\vec{\omega O}, \vec{\omega A}) = \frac{\pi}{4}$

من (1) و (2) نستنتج أن A هي صورة O بالتشابه المباشر f .

بما أن $f(O) = A$ و $f(M) = I$ فإن $(\vec{OM}, \vec{AI}) = \frac{\pi}{4}$.



$$Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

$$\Gamma: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad \text{إذن}$$

(2) نقط تقاطع (C) و (C') إحداثياتها $O(0,0)$ ، $B(2,2)$ وهذه النقط تنتمي إلى Γ .

تطبيق 18

تطبيق 18

الستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (σ, u, v) .

S تشابه مباشر. كتابته المركبة $Z' = \frac{1-3i}{2} Z + \frac{1-3i}{2}$.

(1) عين العناصر المميزة لـ S (المركز ω والزاوية θ والنسبة k).

(2) لنكن M_0 نقطة لاحقتها $1+4\sqrt{3}+3i$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

نعرف متتالية النقط M_{n+1} بالكيفية التالية: $M_{n+1} = S(M_n)$.

(أ) احسب ωM_n بدلالة n .

(ب) علم النقطة M_0 ثم النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 .

(ج) ابتداء من أي رتبة n_0 يكون لدينا من أجل كل $n \geq n_0$.

M_n تنتمي إلى قرص مركزه ω ونصف قطره $r=0.05$.

(3-1) احسب $M_0 M_1$.

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n = M_n M_{n+1}$.

بين أن المتتالية (d_n) هندسية ثم عين حدها الأول وأساسها.

(ج) نضع $L_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n$ احسب L_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (L_n) .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم نسمي G_n مرجح الجملة

$(M_0, 1), (M_1, 1), \dots, (M_n, 1)$.

(أ) بين أنه من أجل $n > 0$ يكون $\omega G_n < \frac{16}{n+1}$.

(ب) استنتج الوضعية النهائية للنقطة G_n لـ n يؤول إلى $(+\infty)$.

الحل ✓

$$(1) S \text{ تشابه مباشر نسبته } \frac{1}{2} \text{ وزاويته } \frac{\pi}{2} \text{ ومركزه النقطة } \omega \text{ ذات اللاحقة } Z_\omega = \frac{1-3i}{1-\frac{1}{2}i}$$

$$\text{ومنه } Z_\omega = 1-i$$

$$(2) M_{n+1} = S(M_n) \text{ يكافئ } Z_{n+1} = \frac{1}{2} i Z_n + \frac{1-3i}{2}$$

$$\text{يكافئ } Z_{n+1} = (1-i) - \frac{1}{2} i (Z_n - (1-i))$$

$$\text{ومنه ينتج } \omega M_{n+1} = \frac{1}{2} \omega M_n$$

$$\text{ومنه } (\omega M_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } \omega M_0 = 8$$

$$\text{إذن } \omega M_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(ج) M_n \text{ تنتمي إلى قرص مركزه } \omega \text{ ونصف قطره } 0.05 \text{ معناه } \omega M_n \leq 0.05$$

$$\omega M_n \leq 0.05 \text{ يكافئ } 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{5}{100} \text{ يكافئ } n \geq 7,34$$

ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 8.

$$(3) (أ) \text{ لدينا } M_1 M_0^2 = \omega M_0^2 + \omega M_1^2 = \omega M_0^2 + \frac{1}{4} \omega M_0^2 = \frac{5}{4} \omega M_0^2$$

$$\text{إذن } M_1 M_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega M_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 8 = 4\sqrt{5}$$

$$(ب) d_n = M_n M_{n+1}$$

$$M_{n+1} M_n^2 = \omega M_n^2 + \omega M_{n+1}^2 = \omega M_n^2 + \frac{1}{4} \omega M_n^2 = \frac{5}{4} \omega M_n^2$$

$$\text{ومنه } M_{n+1} M_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega M_n$$

$$\text{إذن } M_{n+1} M_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{وبالتالي } d_n \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } 4\sqrt{5}$$

$$(ج) L_n = d_0 + d_1 + \dots + d_n = d_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 8\sqrt{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8\sqrt{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 8\sqrt{5}$$

$$(4) \vec{G}_0 M_0 + \vec{G}_0 M_1 + \dots + \vec{G}_n M_n = \vec{0} \quad (1)$$

$$(\vec{G}_n \omega + \omega M_n) + (\vec{G}_{n-1} \omega + \omega M_{n-1}) + \dots + (\vec{G}_0 \omega + \omega M_0) = \vec{0}$$

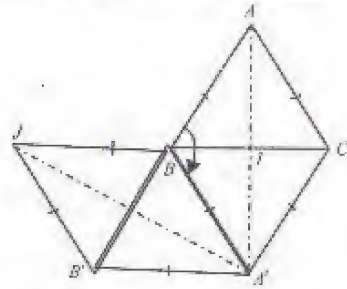
$$\vec{G}_n = \frac{1}{n+1} [\omega M_0 + \dots + \omega M_n]$$

$$\left\| \vec{G}_n \right\| \leq \frac{1}{n+1} \left[\left\| \omega M_0 \right\| + \dots + \left\| \omega M_n \right\| \right]$$

$$\leq \frac{8}{n+1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$\leq \frac{16}{n+1} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$\text{إذن } 0 \leq \left\| \vec{G}_n \right\| \leq \frac{16}{n+1} \leq \frac{16}{n+1}$$



✓ الحل

(1) لدينا :

$$f(A) = r_1 \circ r_2(A) = r_2(A) = A'$$

$$f(B) = r_1 \circ r_2(B) = r_2(B) = B'$$

بما أن $BA = B'A'$ فإن :

$[AA']$ محور القطعة (AB)

و $[BC]$ محور $[AA']$

وبالتالي تقاطعهما هو I

إذن I تنتمي إلى $[AA']$ وبنفس الكيفية نبين أن B منتصف $[AB']$

$$(2) \quad \theta_1 + \theta_2 = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ومنه } f \text{ دوران زاويته } -\frac{\pi}{3} \text{ ومركزه هو تقاطع محور } [AA'] \text{ و } [BB']$$

بما أن $A'B'B'J$ معين فإن محور $[BB']$ هو $[A'J]$ ومحور $[AA']$ هو $[JC]$

إذن J هي مركز الدوران $r_1 \circ r_2$.

تطبيق 19

✓ الحل

$$(1) \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi \quad \text{فإن } T \text{ انسحاب}$$

ولتعيين شعاعه نختار نقطة

ونبحث عن صورتها :

$$T(D) = r_1 \circ r_2 \circ r_3(D)$$

$$= r_1 \circ r_2(B) = r_1(B) = D'$$

شعاع الانسحاب هو $\vec{w} = \vec{DD'}$ أي $w = -2\pi$

$$(2) \quad r_3 \circ T \text{ دوران زاويته } \frac{\pi}{2}$$

$$r_3 \circ T(D) = r_3(D') = D \quad \text{إذن } r_3 \circ T \text{ مركزه النقطة } D.$$

تطبيق 20

✓ الحل

في المستوي الموجه ABC مثلث متقايس الاضلاع بحيث $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

ولتكن I منتصف $[BC]$ و J نقطة بحيث B منتصف $[JC]$.

r_1 الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و r_2 دوران مركزه B وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

نضع $f = r_2 \circ r_1$ ولتكن A' و B' صورتي A و B بالتحويل f .

(1) بين أن I منتصف $[AA']$ و B منتصف $[AB']$.

(2) بين أن f دوران ثم عين مركزه وزاويته.

$$(1) \quad \text{من المعطيات نستنتج أن التحاكي } h \text{ نسبته } \frac{3}{4}$$

و منه نستنتج $\vec{AC} = -2\vec{AD}$

الشعاعان \vec{AC} و \vec{AD} مرتبطان خطياً وعليه A و C على استقامة واحدة

(3) لدينا $S(O) = O$ و $S(A) = C$ و منه نستنتج أن $k = \frac{OC}{OA}$ و $\theta = (\vec{OA}, \vec{OC})$

لقد أخذنا أن $OACB$ معين إذن قطريه منصفان لزواياه.

$$k = \frac{OC}{OA} = \frac{c}{a} = \sqrt{3} \text{ و } (\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{6}$$

إذن التشابه المباشر S مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ونسبته $\sqrt{3}$.

(4) إثبات أن C و G على استقامة واحدة:

لدينا $S(C) = G$ و $S(A) = C$ و $S(D) = F$ و $S(O) = O$

ولدينا من السؤال (2) النقط A و C على استقامة واحدة وبما أن التشابه المباشر يحفظ الاستقامة فإن C و G على استقامة واحدة.

(5) الكتابة المركبة الرفقة للتشابه S هي $Z' = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} Z$

ومنه $Z_D = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} Z_D$

$$f = Z_D - \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{2}$$

(6) الكتابة المركبة الرفقة للتحويل r هي $Z' = e^{-\frac{2\pi i}{3}} Z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

وهي من الشكل $Z' = aZ + b$ مع $|a| = 1$

إذن r دوران زاويته $-\frac{2\pi}{3}$ ومركزه النقطة الوحيدة الصامدة بالتحويل r .

لاحقة المركز هي حل للمعادلة $Z = e^{-\frac{2\pi i}{3}} Z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبعد حلها نجد $Z = 1$

إذن r دوران مركزه النقطة A وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$

(ب) لدينا $(\vec{AO}, \vec{AB}) = (\vec{AO}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{AB}) + 2k\pi$

$$(\vec{AO}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{-a}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{AO}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi$$

$$(\vec{AO}, \vec{AB}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- تعيين المستقيم (Δ) :

$\sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)}$ هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $2(\vec{AO}, \vec{AB})$ وهي $-\frac{2\pi}{3}$

إذن $\sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)} = r$ ومنه $(\Delta) = (AB)$

(ج) التناظر المحوري الذي محوره (AO) كتابته المركبة الرفقة له هي $Z' = \bar{Z}$

ومنه الكتابة $Z' = e^{-\frac{2\pi i}{3}} Z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي $r \circ \sigma_{(AO)}$

ومنه التحويل $r \circ \sigma_{(AO)}$ هو التحويل φ .

من السؤال السابق لدينا $r = \sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)}$

$$\varphi = (\sigma_{(AB)} \circ \sigma_{(AO)}) \circ \sigma_{(AO)} = \sigma_{(AB)} \circ (\sigma_{(AO)} \circ \sigma_{(AO)}) = \sigma_{(AB)} \circ Id = \sigma_{(AB)}$$

ومنه نستنتج أن φ هو التناظر المحوري الذي محوره (AB) .

تطبيق 23

نموذج التشابه المباشر والمتتاليات

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $m \cdot (a, i, j)$ عند مركب.

نعتبر التحويل النقطي T_m من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات

اللاحقة Z بالنقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث $Z' = (m+i)Z + m - 1 - i$

(1-1) هل توجد قيمة لـ m بحيث يكون T_m انسحاباً؟

(2) عين قيمة m بحيث T_m دوران، ثم عين عناصره المميزة.

(11) في ما يلي نضع $m = 1$

(1-1) احسب لاحقة النقطة Ω الصامدة بالتحويل T_1

(ب) من أجل كل عدد مركب $Z \neq 1$ احسب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ، ثم فسر هندسياً

طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ، وبرهن أن T_1 هو تشابه مباشر يطلب

تعيين عناصره المميزة.

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد مركب Z لدينا $Z' - Z = i(Z - 1)$

ثم استنتج أنه إذا كانت M مختلفة عن Ω فإن الثلاث $\Omega MM'$ قائم عند

M ومتساوي الساقين

(2) نعرف في المستوي متتالية النقط (M_n) كما يلي:

$M_0 = 0$ و $M_1 = T_1(M_0)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم:

$$M_n = T_1(M_{n-1})$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $d_n = \Omega M_n$

برهن أن المتتالية (d_n) هندسية. هل هي متقاربة؟

✓ الحل

(1-1) نعلم أن الكتابة المركبة للانسحاب الذي شعاعه w هي $Z' = Z + b$

T_m انسحاب إذا وفقط إذا كان $m+i=i$ ومنه $m=1-i$

(2) دوران إذا وفقط إذا كان $|m+i|=1$

(2) من السؤال 1-ب) لدينا $\Omega M' = \sqrt{2} \Omega M$ ومنه نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n :

$$d_{n+1} = \sqrt{2} d_n \text{ وعليه يكون } \Omega M_{n+1} = \sqrt{2} \Omega M_n$$

ومنه نستنتج أن المتتالية (d_n) هندسية أساسها $\sqrt{2}$

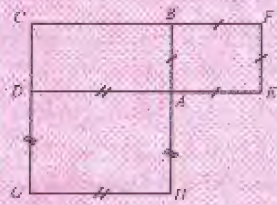
$$d_0 = \Omega M_0 = \Omega O = 1$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $d_n = d_0 (\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^n$

ومنه نستنتج أن المتتالية (d_n) متباعدة. $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$

تطبيق 24

دراسة تركيب التحاكيات والتشابه المباشر



في الشكل المجاور مستطيل $ABCD$

في الاتجاه المباشر.

مربعان $ADGH$ و $AEFB$

في الاتجاه المباشر.

1. نرمز بـ I إلى نقطة تقاطع

الستقيمين (EG) و (FH)

ليكن h_1 التحاكي الذي مركزه I يحول G إلى E

و h_2 تحاكي مركزه I يحول F إلى H

أ) عين صورة الستقيم (CG) بالتحاكي h_1 ثم بالتركيب $h_1 \circ h_2$

ب) عين صورة الستقيم (CF) بالتركيب $h_1 \circ h_2$

ج) تحقق أن $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$ ، ثم استنتج أن الستقيم (AC) يمر أيضا من النقطة I .

2) نريد إثبات أن التوسط الرسوم من A في الثلث AEH هو ارتفاع في الثلث ABD

نرمز إلى منتصف $[EH]$ بالنقطة O .

أ) عبر عن الشعاع \overrightarrow{AO} بدلالة الشعاعين \overrightarrow{AF} و \overrightarrow{AH}

ب) عبر عن الشعاع \overrightarrow{BD} بدلالة الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AD}

ج) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$ ، ماذا تستنتج؟

3) في هذا السؤال ندرس التشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول D إلى A

نضع $AD = k$ و $AB = 1$ مع $k > 0$

أ) عين زاوية و نسبة التشابه S .

ب) عين صورة الستقيم (BD) ثم صورة الستقيم (AO) بالتشابه S .

ج) استنتج أن النقطة Ω نقطة التقاطع (BD) و (AO) هي مركز التشابه S .

✓ الحل

1) أ - تعيين صورة (CG) بالتحاكي h_1

$$|m+i|-1 \text{ يكافئ } \sqrt{m+1}=1 \text{ يكافئ } m=0$$

لدينا إذن $Z' = iZ - 1 - i$

مركز هذا الدوران هو النقطة Ω'

ذات اللاحقة Z حل للمعادلة $Z - iZ - 1 - i = 0$ (1)

بعد حل المعادلة (1) نجد $Z = -1 - i$

ومنه $\Omega(0, -1)$

إذن T_0 دوران مركزه النقطة Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$

II-1-أ) Ω صامدة بالتحويل T_1 إذا فقط إذا كانت $Z_\Omega = (1+i)Z_\Omega - i$

ومنه ينتج $Z_\Omega = 1$

إذن لاحقة النقطة Ω هي 1

ب) من أجل $Z \neq 1$ لدينا $Z' - 1 = \frac{(1+i)Z - i - 1}{Z - 1} = 1 + i$

$$\left| \frac{Z' - 1}{Z - 1} \right| = |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{Z' - 1}{Z - 1}\right) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

لكن $\left| \frac{Z' - 1}{Z - 1} \right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M}$ ومنه $\Omega M' = \sqrt{2} \Omega M$.

$$\arg\left(\frac{Z' - 1}{Z - 1}\right) = (\arg(\Omega M'), \arg(\Omega M)) + 2k\pi$$

$$(\arg(\Omega M'), \arg(\Omega M)) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

إذن التحويل T_1 يحول كل نقطة M مختلفة عن Ω إلى النقطة M' بحيث:

$$(\arg(\Omega M'), \arg(\Omega M)) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ و } \Omega M' = \sqrt{2} \Omega M$$

ومنه نستنتج أن T_1 تشابه مباشر مركزه النقطة Ω ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

ج) لدينا $Z' - Z = (1+i)Z - i - Z = iZ - i = i(Z - 1)$

إذا كانت M مختلفة عن Ω فإن $Z - 1 \neq 0$ و $Z' - Z \neq 0$

$$\arg(Z' - Z) = \arg(i) + \arg(Z - 1) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(Z' - Z) - \arg(Z - 1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\arg(\vec{u}, \vec{MM'})) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(\arg(\vec{\Omega M}, \vec{MM'})) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ومنه نستنتج أن الثلث $\Omega MM'$ قائم في M

وبما أن $Z' - Z = i(Z - 1)$ فإن $|Z' - Z| = |Z - 1|$ أي $MM' = \Omega M$

مما يدل على أن الثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين.

(3) ا) نعلم أن $S(A) = A$ و $S(D) = A$ ومنه نستنتج أن نسبة التشابه المباشر S هي $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{k}$

وزاويته هي (\vec{AD}, \vec{BA})

لكن $k \in \mathbb{Z}$ مع $(\vec{AD}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن S تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{k}$

(ب) تعيين صورة المستقيمين (BL) و (AO) بالتشابه S :

نعلم أن $S(D) = A$ وزاويته التشابه هي $\frac{\pi}{2}$ وصورة (BD) هو مستقيم عمودي على

(BD) ويمر من A إذن $S((BD)) = (AO)$

- وبنفس الطريقة لدينا صورة المستقيم (AO) بالتشابه S هو المستقيم العمودي على

(AO) والمار من B لأن $S(A) = (B)$ إذن $S((AO)) = (BD)$

(ج) تعيين مركز التشابه S :

S يحول (BD) إلى (AO) و يحول (AO) إلى (BD)

إذن S يحول النقطة Ω نقطة تقاطع (BD) و (AO) إلى نقطة تقاطع (BD) و (AO)

وهذا يعني أن Ω صامدة بالتحويل S ومنه نستنتج أن Ω مركز التشابه المباشر S

تطبيق 25

إثبات الإستقامية والتعامد باستعمال التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط :

$Z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i$, $Z_B = 3 + i\sqrt{3}$, $Z_A = 3 - i\sqrt{3}$ ، لاحظها على الترتيب C, B, A

1: ا) علم النقط A, B, C ثم بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع مباشر.

(ب) لتكن G مركز ثقل المثلث OAB عين اللاحقة Z_G للنقطة G

2: ليكن a و b عددين مركبين و R التحويل النقطي من المستوي

في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

حيث $Z' = aZ + b$

(أ) عين a و b بحيث $R(A) = C$ و $R(O) = G$

(ب) بين أن دوران يطلب تعيين مركزه و زاويته

(ج) بين أن المستقيمين (OA) و (OC) متعامدان

ماذا يمكن القول حول النقط G, B و C ؟

(د) أنشئ صورة المثلث OAB بالدوران R مررا إنشائك

3: ليكن a' و b' عددين مركبين و f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة

M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z' = a'Z + b'$

(أ) عين a' و b' بحيث $f(O) = G$ و $f(A) = C$

(ب) لتكن I منتصف $[OG]$ عين النقطة $f(I)$ هل f تناظر ؟

نعلم أن صورة مستقيم بتحاكي هو مستقيم يوازيه.

إذن صورة المستقيم (CG) هو مستقيم يوازيه و يمر من النقطة E لأن $h_1(G) = E$

إذن صورة المستقيم (CG) هو (EF)

- تعيين صورة (CG) بالتحويل h_2 :

لدينا $(h_2 \circ h_1)((CG)) = h_2((EF))$

صورة المستقيم (EF) بالتحاكي h_2 هو الموازي لـ (EF) والمار بالنقطة H لأن $h_2(F) = H$

إذن $(h_2 \circ h_1)((CG)) = h_2((EF)) = (AH)$

(ب) تعيين صورة (CF) بالتحويل h_2 :

صورة (CF) بالتحاكي h_2 هو الموازي لـ (CF) والمار من H لأن $h_2(F) = H$

إذن $h_2((CF)) = (GH)$

صورة (GH) بالتحاكي h_1 هو الموازي لـ (GH) و المار بالنقطة E لأن $h_1(G) = E$

إذن $h_1((GH)) = (AE)$ و $h_1 \circ h_2((CF)) = (AE)$ ومنه نستنتج

(ج) h_2 تحاكي نسبته k_2 ومركزه I و h_1 تحاكي مركزه I نسبته k_1

بما أن $I = (h_1 \circ h_2)(I) = (h_2 \circ h_1)(I)$ فإن $h_2 \circ h_1$ و $h_1 \circ h_2$ تحاكيان لهما نفس المركز I

ونفس النسبة $k_1 k_2$ ومنه نستنتج أن $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$

- المستقيمان (CF) و (CG) يتقاطعان في النقطة C

وصورتيهما بالتحويل $(h_1 \circ h_2)$ أو $(h_2 \circ h_1)$ يتقاطعان في $(h_1 \circ h_2)(C)$

لكن من السؤال السابق عرفنا أن صورتاهما هما (AE) و (AH) اللتان يتقاطعان في A

ومنه نستنتج أن $h_1 \circ h_2(C) = A$

وبما أن مركز التحاكي $(h_1 \circ h_2)$ هو I فإن النقط A, I, C تقع على استقامة واحدة

وعليه نستنتج أن المستقيم (AC) يمر أيضا من I

(2) ا) بما أن $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AH})$ فإن $\vec{AE} + \vec{AH} = 2\vec{AO}$

(ب) $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AD}$

(ج) $\vec{AO} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AH}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD})$

$\vec{AO} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{AE} \cdot \vec{AD} + \vec{AH} \cdot \vec{AB} + \vec{AH} \cdot \vec{AD})$

ولكون $ADGH$ و $AEFB$ مربعان ينتج $\vec{AH} \cdot \vec{AD} = 0$ و $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = 0$

لكن $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = -AH \cdot AB$ و $\vec{AE} \cdot \vec{AD} = -AE \cdot AD$

و $AH = AD$ و $AE = AB$

ومنه ينتج $\vec{AE} \cdot \vec{AD} - \vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$ ومنه نستنتج أن $\vec{AO} \cdot \vec{BD} = 0$

إذن المستقيمين (AO) و (BD) متعامدان

وبما أن (AO) هو المتوسط المار من A في المثلث AEH نستطيع القول أن المتوسط المار من

A في المثلث AEH هو ارتفاع في المثلث ABD

✓ الحل

(1) لدينا $Z_B = \bar{Z}_A$ ومنه $|Z_B| = |\bar{Z}_A|$ إذن $OA = OB$

لدينا $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{OB}) = \arg(Z_B) - \arg(Z_A) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) + 2k\pi$$

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه نستنتج أن المثلث OAB متقايس الأضلاع مباشر

$$Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = 2 \quad \text{ب.}$$

(2) حساب b, a

$$\begin{cases} Z_G = aZ_O + b \\ Z_G = aZ_A + b \end{cases} \quad \text{لدينا} \quad \begin{cases} b = 2 \\ a = i \end{cases} \quad \text{ومنه ينتج}$$

$$Z' = iZ + 2$$

$$\text{ب.} \quad \text{بما أن } |i| = 1 \text{ و } \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

فإن R دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه لاحقته Z حل للمعادلة $Z = iZ + 2$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $Z = 1 + i$

إذن R دوران مركزه النقطة $\Omega(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

(ج) بما أن $R(O) = G$ و $R(A) = C$ فإن صورة (OA) بالدوران R هو المستقيم (GC)

لكن R دوران مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن (OA) و (GC) متعامدان

- المثلث OAB متقايس الأضلاع ومنه التوسط (BG) منطبق على الارتفاع الرسوم من B

إذن (BG) عمودي على (OA)

نستنتج أن (BG) و (GC) منطبقان.

وعليه النقط G, B, C على استقامة واحدة

(د) صورة المثلث OAB بالدوران R هو المثلث GCB' حيث $R(O) = G$ و $R(A) = C$

$$\text{و } R(B) = B'$$

وبما أن الدوران تقايس فإن المثلث GCB' هو أيضا متقايس الأضلاع

$$\begin{cases} b' = 2 \\ a' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases} \quad \text{ومنه نجد} \quad \begin{cases} Z_G = a' \bar{Z}_O + b' \\ Z_C = a' \bar{Z}_A + b' \end{cases} \quad (3)$$

(ب) النقطة I ذات اللاحقة 1

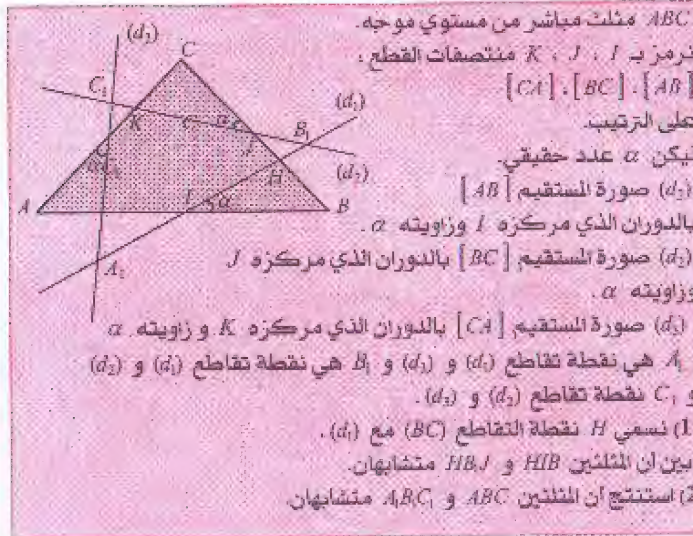
$$Z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 2$$

النقطتان I و $f(I)$ غير منطقتين

بما أن $f(O) = G$ و f منتصف $[OG]$ غير صامد بالتحويل f فإن التحويل f ليست تناظر.

تطبيق 26

البرهان باستعمال التشابه



ABC مثلث مباشر من مستوي موجه.

نرمز بـ K, J, I منتصفات القطع،

$$[CA], [BC], [AB]$$

على الترتيب.

ليكن α عدد حقيقي.

(d_1) صورة المستقيم $[AB]$

بالدوران الذي مركزه I وزاويته α .

(d_2) صورة المستقيم $[BC]$

بالدوران الذي مركزه J وزاويته α .

(d_3) صورة المستقيم $[CA]$

بالدوران الذي مركزه K وزاويته α .

A_1 هي نقطة تقاطع (d_1) و (d_2) و B_1 هي نقطة تقاطع (d_1) و (d_3)

و C_1 نقطة تقاطع (d_2) و (d_3) .

(1) نسمي H نقطة التقاطع (BC) مع (d_1) .

بين أن المثلثين HIB و HIB_1 متشابهان.

(2) استنتج أن المثلثين ABC و $A_1B_1C_1$ متشابهان.

✓ الحل

(1) بما أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس لهما نفس القيس

$$\text{فإن } \angle HIB = \angle HIB_1 \text{ و } \angle HBI = \angle HB_1I$$

المثلثان HIB و HIB_1 فيهما زاويتين لهما نفس القيس

إذن فهما متشابهان

(2) لكون المثلثين HIB و HIB_1 متشابهان

$$\text{ينتج } \angle HBI = \angle HB_1I \text{ أي } \angle CBA = \angle C_1B_1A_1$$

لكن نقطة تقاطع (d_1) مع $[AB]$ ، بنفس الطريقة المستعملة في (1) نبرهن أن المثلثين

AKM و MA_1I متشابهان.

$$\text{نستنتج أن } \angle KAM = \angle MA_1I \text{ أي } \angle CAB = \angle C_1A_1B_1$$

المثلثان ABC و $A_1B_1C_1$ فيهما زاويتين لهما نفس القيس إذن فهما متشابهان.

تطبيق 27

تحديد عناصر التشابه

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس (a, \vec{u}, \vec{v})
 1. نعتبر النقط $A_1(3-7i)$ ، $C(-4+6i)$ ، $B(14)$ ، $A(-4-6i)$ ، $C_1(-3-i)$ ، $B_1(9+5i)$
 2. احسب لواحظ المنتصفات K ، J ، I للقطع $[AB]$ و $[BC]$ و $[CA]$ على الترتيب وتعلم هذه النقط.
 3. بين أن النقط A_1 ، I ، B_1 على استقامة واحدة ونقبل أن C_1 ، J ، B_1 على استقامة واحدة.
 4. عيّن قياسا بالراديان للزاوية $(\vec{IB}, \vec{IB_1})$ ونقبل أن $(\vec{KA}, \vec{KA_1}) = \frac{\pi}{4}$ ونقبل أن $(\vec{JC}, \vec{JC_1}) = \frac{\pi}{4}$ و
 5. ما هي صورة المستقيم (AB) بالدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ؟
 6. نقبل أنه يوجد تشابه مباشر S يحول النقط A ، B ، C إلى A_1 ، B_1 ، C_1 على الترتيب.
 7. برهن أن الكتابة المركبة المرفقة لـ S هي $Z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)Z + 2 - 2i$
 8. حيث Z و Z' لاحقتي على الترتيب لنقطة وصورتهما بالتشابه S .
 9. عيّن نسبته وزاوية التشابه S .
 10. عيّن لاحقة المركز Ω للتشابه S .
 11. ماذا تمثل النقطة Ω بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

الحل

$$Z_K = \frac{1}{2}(Z_C + Z_A) = -4 \text{ و } Z_J = \frac{1}{2}(Z_B + Z_C) = 5 + 3i \text{ و } Z_I = \frac{1}{2}(Z_A + Z_B) = 5 - 3i \quad (1-1)$$

2. لاحقة الشعاع A_1B_1 هي $Z_{B_1} - Z_{A_1} = 6 + 12i$ ولاحقة الشعاع A_1I هي

$$Z_I - Z_{A_1} = 2 + 4i \text{ ومنه نستنتج أن } A_1B_1 = 3A_1I \text{ وهذا يعني أن النقط } A_1, B_1, I \text{ على استقامة واحدة.}$$

$$(\vec{IB}, \vec{IB_1}) = (\vec{u}, \vec{IB_1}) - (\vec{u}, \vec{IB}) + 2k\pi \quad (3)$$

$$(\vec{IB}, \vec{IB_1}) = \arg\left(\frac{Z_{B_1} - Z_I}{Z_B - Z_I}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{IB}, \vec{IB_1}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } (\vec{IB}, \vec{IB_1}) = \arg\left(\frac{2}{3}(1+i)\right) + 2k\pi$$

4. ليكن r الدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{4}$ لدينا $r(I) = I$

بما أن I تنتمي إلى (AB) فإن صورة (AB) بالدوران r يمر بالنقطة $r(I)$ إذن يمر من I

صورة (AB) هو مستقيم يمر من I وشعاع توجيهه \vec{u} يحقق $(\vec{IB}, \vec{u}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$(\vec{IB}, \vec{IB_1}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

لذلك السؤال السابق لدينا (IB) أو (A_1B_1)

1- II لدينا $S(A) = A_1$ و $S(B) = B_1$ و $S(C) = C_1$

بما أن S تشابه مباشر فإن كتابته المركبة هي $Z' = aZ + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$

$$(1) \text{ بما أن } S(A) = A_1 \text{ فإن } Z_{A_1} = aZ_A + b \text{ (1)}$$

$$(2) \text{ ومن } S(B) = B_1 \text{ نستنتج أن } Z_{B_1} = aZ_B + b \text{ (2)}$$

$$(3) \text{ ومن } S(C) = C_1 \text{ نستنتج أن } Z_{C_1} = aZ_C + b \text{ (3)}$$

$$\text{من (1) و (2) و (3) نجد } a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } b = 2 - 2i$$

إذن الكتابة المركبة للتشابه S هي $Z' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)Z + 2 - 2i$

$$(2) \text{ نسبة التشابه } S \text{ هي } \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| \text{ وتساوي } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{وزاوية التشابه } S \text{ هي } \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \text{ وتساوي } \frac{\pi}{4}$$

$$(ب) \text{ اللاحقة } \omega \text{ للمركز } \Omega \text{ تحقق } \Omega = \frac{1}{2}(1+i)\omega + 2 - 2i$$

$$\text{وبعد حل هذه المعادلة نجد } \omega = \frac{4-4i}{1-i} = 4$$

إذن لاحقة Ω هي العدد المركب 4.

$$(3) \text{ نلاحظ أن } \Omega A = |Z_A - Z_\Omega| = 10 \text{ و } \Omega B = |Z_B - Z_\Omega| = 10 \text{ و } \Omega C = |Z_C - Z_\Omega| = 10$$

إذن $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ ومنه نستنتج أن Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التشابهات غير المباشرة

تطبيق 28

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس (a, \vec{u}, \vec{v})

نعطي النقط A, C, D و Ω لواحظها على الترتيب $1, 1+i, 3, 1+\frac{1}{2}i$

1. ليكن (r) الدائرة ذات المركز Ω وثلاثة من A, C, D

(أ) بين أن (r) تمر من C و D

(ب) بين أن القطعة $[AD]$ قطر للدائرة (r)

(ج) علم النقط A, C, D و Ω و نسمي M نقطة التقاطع الثانية لـ (OA) مع

نفرض أن S يقبل نقطة صامدة F تختلف عن O .
نعلم من الدرس أن التشابه الذي له نقطتين صامدتين مختلفتين هو إما التطبيق المطابق أو التناظر لكن لدينا $S(C) = A$ إذن هو ليس التطبيق المطابق للمستوي.
ولقد بينا أن S ليس تناظرا إذن O هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل S .

(1) المثلثان OAD و OCB متشابهان و $S(O) = O$ و $S(B) = D$ و $S(C) = A$

وعليه $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{BC}{DA}$ ومنه نستنتج أن $OB \times OA = CO \times OD$

(ب) $OB = |Z_B| = \frac{OC \times OD}{OA}$ ومنه $|Z_B| = \frac{1 \times 3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\arg Z_B = (\vec{u}, \vec{OB}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

بما أن النقط O, A, B على استقامة واحدة بهذا الترتيب فإن:

$(\vec{u}, \vec{OB}) = (\vec{u}, \vec{OA}) = \arg Z_A + 2k\pi$

$(\vec{u}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(ج) الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = a\bar{Z} + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$

بما أن $S(O) = O$ فإن $b = 0$

بما أن $S(C) = A$ فإن $a = 1 + i$

ومنه الكتابة المركبة لـ S هي $Z' = (1 + i)\bar{Z}$

(د) الكتابة المركبة لـ $S \circ S$ هي $Z' = 2Z$

إذن $S \circ S$ هو تحاكي مركزه النقطة O ونسبته 2.

(د) بين أن النقطة O تقع خارج القطعة $[AB]$.

(2) برهن هندسيا أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين.

(3) ليكن S التشابه الذي يحول المثلث OCB إلى المثلث OAD .

بين أن S تشابه غير مباشر مختلف عن التناظر المحوري، ثم استنتج مركزه

(1-4) استنتج من السؤال (2) أن $OA \times OB = OC \times OD$

(ب) استنتج لاحقة Z_B للنقطة B .

(ج) عين الكتابة المركبة لـ S .

(د) عين الطبيعة والعناصر المميزة لـ $S \circ S$.

الحل

(1) $\Omega A = |Z_A - Z_O| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $\Omega C = |Z_C - Z_O| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $\Omega D = |Z_D - Z_O| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

بما أن $\Omega A = \Omega C = \Omega D$ فإن الدائرة (γ) ذات المركز Ω تمر أيضا من C و D .

(ب) النقطتان A و C لهما نفس الفاصلة وبالتالي تنتميان إلى المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

المستقيم (CD) هو محور الفواصل إذن المثلث ACD قائم في C .

وبما أن الدائرة (γ) محيطية بالمثلث ABC فإنها تقبل الوتر $[AD]$ كقطر لها.

(ج) لدينا $O\Omega = |Z_\Omega| = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ومنه $O\Omega > \frac{\sqrt{5}}{2}$

إذن النقطة O موجودة خارج الدائرة (γ) ذات المركز Ω ونصف القطر $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

وبما أن (OA) يقطع (γ) في A و B فإن القطعة $[AB]$ هي وتر في الدائرة (γ) .

إذن القطعة $[AB]$ محتواة في القرص الذي حافته (γ) .

ولكون O تقع خارج (γ) فإن O تقع خارج القطعة $[AB]$.

(2) كون النقط O, A, B على استقامة واحدة و O, C, D على استقامة واحدة

نستنتج $\hat{AOD} = \hat{BOC}$

الزاويتان \hat{ABC} و \hat{ADC} داخل الدائرة (γ) وهما تحصران نفس القوس AC

إذن $\hat{ABC} = \hat{ADC}$ أي $\hat{ABC} = \hat{ADO}$

المثلثان OAD و OCB فيهما على التوالي زاويتين لهما نفس القيس إذن فهما متشابهان

بما أن $OA = \sqrt{2}$ و $OC = 1$ فإن $OA \neq OC$

ومنه نستنتج أن المثلثين OAD و OCB غير متقايسين.

(3) ليكن S التشابه الذي يحول OCB إلى OAD

لدينا إذن $S(O) = O$ و $S(B) = D$ و $S(C) = A$

- التشابه S يحول (\vec{OC}, \vec{OB}) إلى زاوية معاكسة لها (\vec{OA}, \vec{OD})

إذن S تشابه غير مباشر

وبما أن S ليس تقايسا إذن لا يمكنه أن يكون تناظرا.

- بما أن $S(O) = O$ إذن O نقطة صامدة بالتشابه S

مَآرِين وَمَسَائِل

1 - λ عدد حقيقي ثابت. في المستوي المركب تعتبر النقاط A, B, C لواحقها على الترتيب

$$Z_C = 7 + \lambda i, \quad Z_B = 3 - i, \quad Z_A = -1 + 2i$$

(1) تحقق أنه من أجل كل λ فإنه يوجد تشابه مباشر S ، وحيد بحيث $S(A) = B$ و $S(B) = C$.

(2) نفرض أن الكتابة المركبة لـ S من الشكل $Z' = aZ + b$ مع $a \neq 0$ احسب a بدلالة λ .

(ب) هل توجد قيمة لـ λ بحيث S :

انسحاب ؟ دوران ؟ تشابه مباشر زاويته $\frac{\pi}{2}$ ؟

2 - ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي الموجه بحيث $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ و J منتصف $[AC]$ و O مركز ثقل المثلث ABC أنشئ صورة المثلث ABC في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

(ب) بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة J ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3 - في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) للمستوي الموجه، التشابه المباشر S كتابته المركبة هي $Z' = 2iZ - 2$.

(1) أوجد صورة الدائرة (γ_1) التي مركزها I ذات اللاحقة $1 + 2i$ ونصف قطرها 2 بالتشابه S .

(2) أوجد صورة الدائرة (γ_2) التي مركزها J ذات اللاحقة i ونصف قطرها 1 بالتشابه S .

(3) أوجد صورة المستقيم d المار من نقط تقاطع (γ_1) و (γ_2) .

4 - المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) وحدة الرسم 5 cm A, B, C نقط لواحقها $i, \sqrt{2}, \sqrt{2} + i$ على الترتيب، I منتصف القطعة $[OB]$ ،

نرمز بـ S إلى التشابه المباشر الذي يحول A إلى I و B إلى C .

(1-1) أوجد الكتابة المركبة لـ S .

(ب) عين العناصر المميزة لـ S (المركز Ω ، الزاوية والنسبة).

(ج) برهن أن Ω هي مركز ثقل المثلث ABC .

(2) نعرف متتالية النقط A_n بالكيفية التالية :

$A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع $A_{n+1} = S(A_n)$

(أ) علم النقط A_1, A_2, A_3 على الشكل.

(ب) نرمز بـ U_n إلى طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$

- عبر عن U_n بدلالة U_{n-1}

- احسب U_0 ثم اكتب U_n بدلالة n

- احسب $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

5 - في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) عبر التشابه المباشر S الذي كتابته المركبة $Z' = \frac{1}{2}(1+i)Z + \frac{5}{2}(1+i)$ و Ω مركزه.

M_0 نقطة ذات اللاحقة $2 + 4i$ و $M_1 = S(M_0)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $M_{n+1} = S(M_n)$. ابتداء من أي رتبة N_0 تكون النقط M_n تنتمي إلى قرص مركزه النقطة Ω ونصف قطره 10^{-2} .

6 - من أجل كل سؤال يمكن أن توجد عدة قضايا صحيحة، عين الصحيحة منها والخاصة مبررا إجابتك في كل مرة.

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) ، النقط A, B, I لواحقها على الترتيب $1, 1 + 2i, 0$ نرمز بـ S إلى التشابه المباشر الذي مركزه I و بحيث $S(A) = B$

(أ) له كتابة مركبة $Z' = \sqrt{5}(1+i)Z + i$

(ب) النقطة C ذات اللاحقة $1 - 3i$ صورتها بالتشابه S هي النقطة C' ذات اللاحقة 5

(ج) إذا كانت D ذات اللاحقة $2 - i$ فإن المثلثين AOC و BDC' متشابهان في الاتجاه المباشر

7 - احب بنعم أو خطأ مبررا إجابتك على ما يلي :

(1) كل تحاكي نسبته a^2 - هو تشابه مباشر نسبته a^2

(2) التشابه المباشر S المركب من تحاكي مركزه O ونسبته $\sqrt{2}$ - ودوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$ زاويته هي $\frac{5\pi}{4}$

(3) الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته θ حيث $\theta \neq \pi$ و M' صورة M بالدوران r و I منتصف $[MM']$.

I هي صورة M بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{\theta}{2}$ ونسبته $\cos \frac{\theta}{2}$

8 - A و B نقطتان مختلفتان و r_1 و r_2 دورا نين مركزيهما على التوالي A و B وزاويتهما $\frac{\pi}{2}$ ، من أجل كل نقطة M من المستوي النقطتين M_1 و M_2 صورتي M

ب) r_A و r_B على التوالي. نضع $t = r_B \circ r_A^{-1}$

(أ) انشئ النقطة C حيث $C = t(A)$

(ب) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل t .

(ج) ما هي طبيعة الرباعي $M_1 M_2 C A$ ؟

(2) نفرض أن النقطة M تلمس الدائرة (T) ذات القطر $[AB]$

(أ) عين ثم انشئ المحل الهندسي للنقطة M_2 لـ M تلمس (T)

(ب) ليكن ω_1 و ω_2 منصفتي $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب، قارن بين الشعاعين \vec{AC} و $\vec{M_1 M_2}$

(ج) عين ثم ارسم المحل الهندسي للنقطة I منتصف $[M_1 M_2]$ لـ M تلمس (T).

9 - في المستوي الوجه، نعتبر مثلث متقايس الساقين ABC

بحيث $AB = AC$ و $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4}$

I نقطة بحيث أن المثلث CAI متقايس الساقين وقائم مع $(\vec{CA}, \vec{CI}) = -\frac{\pi}{2}$ ، نضع

$AB = 5 \text{ cm}$

(1) نسمي r_A الدوران الذي مركزه النقطة A ويحول النقطة B إلى C و r_C دوران

مركزه النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. نضع $f = r_C \circ r_A$

(أ) عين صورة كل من A و B بالتحويل f .

(ب) بين أن f دوران يطلب تعيين زاويته ومركزه O .

(ج) بين أن الرباعي $ABOC$ معين.

(2) S تشابه مباشر مركزه النقطة O ويحول النقطة A إلى B ولتكن U صورة C بالتحويل

H ، منتصف القطعة $[BC]$ و H' صورتها بالتشابه S .

(أ) عين زاوية S ثم بين أن C' تنتمي إلى المستقيم (OA)

(ب) عين صورة القطعة $[OA]$ بالتحويل S ثم بين أن H' منتصف $[OB]$

(ج) بين أن (CH') عمودي على (OB) ثم استنتج أن C' مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OBC .

10 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ معلم متعامد ومتجانس لمستوي الوجه، النقط A, B, C

لواحقها على الترتيب $i, \sqrt{2}$ و $\sqrt{2} + i$.

النقط I, J, K منتصفات القطع $[OB], [AC], [BC]$ على الترتيب، نسمي S

التشابه المباشر بحيث $S(A) = I$ و $S(O) = B$

(1-أ) ما هي الكتابة المركبة لـ S ؟

(ب) ما هي اللاحقة ω للنقطة Ω مركز S .

(ج) ما هي صورة المستطيل $OBCA$ بالتشابه S ؟

(2) نعتبر التحويل $S^2 = S \circ S$

(أ) برهن أن S^2 تحاكي يطلب تعيين مركزه ونسبته

(ب) ما هي صور النقط A, B, O بالتحويل S^2 .

(3) استنتج من الأسئلة السابقة أن المستقيمات (OC) و (BD) و (AK) متقاطعة.

11 - O و A نقطتان من المستوي الوجه بحيث $OA = 4 \text{ cm}$ و (γ) الدائرة ذات المركز

O والتي تمر من A . و S التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته $\frac{1}{2}$.

(1) عين (γ') صورة (γ) بـ S ثم عين مركز ونصف قطر (γ') .

(2) النقطة الثانية المشتركة بين (γ') و (γ) ، نضع $S(I) = B$ و $S(B) = J$

برهن أن النقطتين I و J متقابلتان قطريا بالنسبة إلى B على (γ) و (γ')

(3) برهن أن J صورة I بتحاكي مركزه A يطلب تعيين نسبته.

12 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي الوجه، نعتبر النقط A, A', B, B'

لواحقها على التوالي $Z_A = 1 - 2i, Z_{A'} = -2 + 4i, Z_B = 3 - i, Z_{B'} = 5i$

(1-أ) علم النقط A, A', B, B' ثم بين أن الرباعي $ABB'A'$ مستطيل.

(ب) نسمي σ التناظر المحوري الذي محوره (Δ) بحيث $\sigma(A) = A'$ و $\sigma(B) = B'$

أوجد معادلة (Δ) ثم ارسم (Δ) .

(ج) بين أن σ له كتابة مركبة $Z' = \frac{1}{5}(3 + 4i)\bar{Z} + 2i - 1$ (1)

(2) g التشابه الذي كتابته المركبة هي $Z' = -\frac{2}{5}(3 + 4i)\bar{Z} + 5 - i$

(أ) نضع $C = g(A)$ و $D = g(B)$ أوجد لاحقتي C و D ثم علمهما في الشكل السابق.

(ب) h التحاكي الذي نسبته 2 - والمركز Ω ذات اللاحقة $1 + i$

أوجد الكتابة المركبة لـ h ثم تحقق أن $h(A) = C$ و $h(B) = D$

(ج) نضع $f = h^{-1} \circ g$

أوجد الكتابة المركبة لـ f ثم استنتج أن $g = h \circ \sigma$

13 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ معلم متعامد ومتجانس لمستوي الوجه، f تحويل نقطي كتابته

المركبة $Z' = -\frac{1}{2}i(\bar{Z} + 2 - 4i)$ و $\sigma_{(\Delta)}$ تناظر محوري محوره المستقيم $(\Delta): y = 0$

(1) أثبت أن $f \circ \sigma_{(\Delta)}$ تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره الأساسية.

(2) أثبت أن $f \circ f$ تشابه مباشر، ثم أثبت أن f مركب تبديلي من تناظر محوري بالنسبة

إلى مستقيم (d) يمر من $(-2, 0)$ وتحاكي مركزه ω ونسبته k حيث $k > 0$

14 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ معلم متعامد ومتجانس لمستوي الوجه و S التشابه المباشر

كتابته المركبة هي $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z + 5\sqrt{3}$

(1) عين العناصر الأساسية للتشابه S .

(2) نعتبر التحويل S^n حيث $S^n = \underbrace{S \circ S \circ S \circ \dots \circ S}_n$ حيث $n \geq 2$

- (ب) نضع $\sigma = \text{soh}^{-1}$ ما هي الكتابة المركبة لـ σ ؟
 ثم بين أن σ يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كمجموعة نقاط صامدة.
 (ج) استنتج طبيعة σ ثم بين أن S هو مركب من تحاكي وتناظر محوري.

(I.) في المستوي الموجه، $OIBJ$ مربع طول ضلعه 1 وبحيث $(\vec{OI}, \vec{OJ}) = \frac{\pi}{2}$

- A نقطة من نصف المستقيم $[JI]$ مختلفة عن I و J . نرسم S إلى التشابه الذي مركزه النقطة O وبحيث $S(I) = A$
 (1) أنشئ صورة المربع $OIBJ$ بالتحويل S ، نضع $S(B) = B'$ و $S(J) = J'$
 (2) في هذا السؤال نريد إثبات أن B' هي نقطة من (BJ) من أجل ذلك نرسم بـ σ إلى التشابه المباشر ذو المركز O والزواية $\frac{\pi}{4}$ والنسبة $\sqrt{2}$.

- (أ) حدد $\sigma(A)$ و $\sigma(I)$ و $\sigma(J)$
 (ب) استنتج أن B' نقطة من المستقيم (JB)
 (3) في هذا السؤال نريد إنشاء النقطة $A' = S(A)$
 (أ) لماذا A' نقطة من $(J'A)$ ؟
 (ب) أنشئ صورة المستقيم (OA) بـ S ثم استنتج إنشاء A' .
 (II) نزود الآن المستوي بمعلم متعامد ومتجانس (o, u, v) ولتكن m فاصلة A مع m عدد حقيقي من المجال $]0, +\infty[$ ويختلف عن 1.
 (1-1) برهن أن اللاحقة $a \perp A$ هي $a = m + i(1-m)$
 (ب) برهن أن التشابه S له كتابة مركبة $Z' = [m + i(1-m)]Z$
 (ج) استنتج أن A' لاحتها a^2 و B' لاحتها $(2m-1)+i$.

18

- (أ) ما هي طبيعة التحويل S^n ؟ ثم عين عناصره المميزة
 (ب) ما هي قيم n التي من أجلها يكون S^n تحاكيا ؟
 (3) لتكن $M_0(-1, 0)$ نقطة من المستوي ولنعر متتالية النقاط كما يلي :
 $M_{n+1} = S(M_n)$ مع $n \in \mathbb{N}$

- ولنعر متتالية الأعداد الحقيقية (U_n) المعرفة بـ $U_n = \left\| \vec{\omega M_n} \right\|$ حيث ω مركز التشابه S
 (أ) برهن أن (U_n) متتالية هندسية ثم عين حدها الأول وأساسها.
 (ب) احسب بدلالة n المجموع $d_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$
 (ج) عين المجموعة التي تنتمي إليها M_n بحيث $U_n \leq 2$

- (15) - (o, \vec{u}, \vec{v}) معلم متعامد ومتجانس مباشر للمستوي الموجه، ولتكن ω و ω' نقطتان منه لواحتهما على الترتيب Z_1, Z_0 وليكن r دوران مركزه ω' وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ و h تحاكي مركزه ω ونسبته $\sqrt{2}$. ولتكن $M(x, y)$ صورة $M'(x', y')$ بالتحويل hor لواحتهما Z' و Z على الترتيب.
 (1) عبر عن Z' بدلالة Z_1, Z_0 ، ثم عين طبيعة التحويل hor .
 (2) ما هي العلاقة بين Z_1 و Z_0 حتى يكون hor تشابه مباشر مركزه النقطة O وزاويته $(-\frac{\pi}{4})$ ونسبته $\sqrt{2}$.

15

- (16) - في المستوي المركب f تحويل نقطي كتابته المركبة $Z' = -2iZ + 1 + i$
 (1) بين أن f له نقطة صامدة وحيدة ω .
 (2-1) ليكن h تحاكيا مركزه ω ونسبته 2، عين الكتابة المركبة لـ h ثم لـ h^{-1} .
 (ب) نضع $\sigma = f \circ h^{-1}$ ، عين الكتابة المركبة للتحويل σ
 (3) بين أن مجموعة النقاط الصامدة بالتحويل σ هي مستقيم (d) يطلب تعيين معادلته، ثم استنتج طبيعة التحويل σ
 (4) بين أن f مركب من تحاكي وتناظر محوري ؟

16

- (17) - في معلم متعامد ومتجانس مباشر (o, \vec{u}, \vec{v}) ، النقاط A, C, D ، لواحها $1, 2, 8$ و (γ) دائرة محيطها بالمثلث ACD تقطع مجور الترتيب في B .
 (1) برهن باستعمال استدلال هندسي أن المثلثين OAD و OCB متشابهان وغير متقايسين
 (2) ليكن S تشابها يحول المثلث OAD إلى المثلث OCB
 (أ) عين نسبة S ، (ب) لماذا S تشابه غير مباشر مختلف عن التناظر ؟
 (ج) لماذا S له نقطة صامدة وحيدة هي مبدأ المعلم ؟
 (د) ما هي الكتابة المركبة لـ S ؟

17

- (3-1) ليكن h تحاكيا مركزه O ونسبته $\frac{1}{2}$ ، عين الكتابة المركبة لـ h^{-1}